TEOREMA DEL VALOR MEDIO Y APLICACIONES

June Amillo

13/12/99

Contenido

1 Teorema del Valor Medio

El cálculo diferencial tiene gran número de aplicaciones. En las secciones anteriores hemos visto dos de ellas: Estimación de magnitudes mediante diferenciales y análisis de problemas de cambios relacionados mediante la regla de cadena. Ahora veremos la aplicación del cálculo diferencial al estudio de las propiedades de una función: Análisis de gráficas, problemas de optimización y resolución de formas indeterminadas.

Primeramente, presentaremos tres teoremas en los que se basan dichas aplicaciones.

1.1 Condición Necesaria de Máximo o Mínimo

El primer teorema traduce a una forma matemática ideas intuitivas tales como que una pendiente se hace horizontal al llegar a la cima o que la velocidad de una pelota lanzada hacia arriba es cero cuando empieza a caer.

Teorema 1 (Condición necesaria de extremo local) *Sea f una función real diferenciable en un intervalo abierto (a,b). Si f alcanza un máximo o mínimo relativo en un punto $c \in (a,b)$, entonces*

$$f'(c) = 0.$$

Dem.: Supongamos que f alcanza un máximo relativo en c. Entonces existe un $r > 0$ tal que $f(c+h) \leq f(c)$ para todo $-r < h < r$. Por tanto,

$$\Delta f = f(c+h) - f(c) \leq 0$$

para todo $-r < x < r$. Por otra parte, $\Delta x = h$ será positivo a la derecha de c y negativo a la izquierda. En consecuencia,

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \qquad \text{si} \qquad 0 < h < r$$

y

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \qquad \text{si} \qquad -r < h < 0.$$

Como f es diferenciable en c, existe el límite del cociente incremental cuando h tiende hacia 0 y dicho límite es $f'(c)$. Según lo anterior, se tiene

$$\begin{aligned} f'(c) &= f'(c+) \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f'(c) &= f'(c-) \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $f'(c) = 0$. ■

En relación con este teorema son necesarias algunas observaciones:

1. La condición anterior no es suficiente. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ posee derivada cero en $x = 0$ y en cambio no posee ni máximo ni mínimo en dicho punto. Será por tanto necesario un estudior posterior de estos puntos para determinar si corresponden a un máximo, a un mínimo o a ninguna de los dos cosas.

2. La condición pierde sentido en los puntos en que f no sea diferenciable. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ posee un mínimo en $x = 0$ y en cambio la derivada no es cero ya que ni tan siquiera existe.

3. La condición no se verifica en los extremos del intervalo si la función estuviera definida en dichos puntos. Por ejemplo, la función $f(x) = x$ con dominio limitado al intervalo $[0, 1]$ posee un máximo en $x = 1$ y un mínimo en $x = 0$. En cambio la derivada no se anula en ninguno de los dos puntos.

Definición 2 *Sea f una función real definida en un intervalo abierto (a, b) Un punto $c \in (a, b)$ es un* punto crítico *de f sí y solo sí*

$$f'(c) = 0 \qquad o \qquad f'(c) \text{ no existe.}$$

En un intervalo abierto los máximos y mínimos de una función, si existen, se encuentran entre los puntos críticos. Si el intervalo incluyera alguno de sus extremos, los máximos y mínimos pueden alcanzarse también en dichos extremos.

1.2 Teorema de Rolle

Supongamos una función definida en un intervalo cerrado que toma los mismos valores en los extremos, es decir los puntos correspondientes de la gráfica se encuentran a la misma altura. Puede parecer que necesariamente la gráfica ha de ser horizontal en algún punto del intervalo. Esto es cierto bajo hipótesis de continuidad y diferenciabilidad.

Teorema 3 (de Rolle) *Sea f una función real continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b). Si $f(a) = f(b)$ existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Dem.: Por la propiedad de existencia de extremos de una función continua podemos asegurar que f alcanza máximo M y mínimo m en el intervalo $[a, b]$.

En primer lugar supongamos que éstos se alcanzan en los extremos a y b. Por las condiciones del teorema $M = f(a) = f(b) = m$, lo que implica necesariamente que f es constante. En este caso la derivada de f se hace cero en todos los puntos del intervalo (a, b).

Si alguno de los extremos, supongamos M, se alcanzara en el interior del intervalo $[a, b]$, existirá un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = M$. Por la condición necesaria de máximo se ha de cumplir

$$f'(c) = 0.$$

Por lo que en cualquier caso existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. ■

1.3 Teoremas del Valor Medio

Por último el siguiente teorema expresa la idea geométrica de que en algún punto la pendiente debe coincidir con la pendiente media, o dicho de otra forma que debe existir un punto en el cual la tangente sea paralela a la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Teorema 4 (del valor medio) *Sea f una función real continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b). Entonces, existe un $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

El objetivo de este teorema no es el de hallar el punto c sino el de utilizarlo en consideraciones teóricas o para obtener estimaciones de las variaciones de la función. En éstos casos es preferible escribir la fórmula anterior en la forma

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Ello permite, por ejemplo, estimar el incremento de f en el intervalo $[a, b]$ cuando se disponga de una cota M del valor absoluto de la derivada. Si $|f'(c)| \leq M$, se verifica

$$\begin{aligned} |\Delta f| &= |f'(c)|(b - a) \\ &\leq M(b - a). \end{aligned}$$

Este teorema resulta haciendo $g(x) = x$ en el siguiente teorema más general:

Teorema 5 (de Lagrange) *Sean f y g funciones reales continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciables en el intervalo abierto (a, b). Entonces, existe un $c \in (a, b)$ tal que*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)].$$

Dem.: Sea

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - f(x)[g(b) - g(a)].$$

De la continuidad de f y g en $[a, b]$ se sigue que h es a su vez continua en $[a, b]$. De la misma forma de la diferenciabilidad de f y g en (a, b) se sigue la diferenciabilidad de h en (a, b). Por otra parte,

$$h(a) = h(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b).$$

Aplicando el Teorema de Rolle a la función h se sigue la existencia de un $c \in (a, b)$ tal que

$$h'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c) - f'(c)[g(b) - g(a)] = 0$$

de donde se sigue

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)]$$

lo que concluye el teorema. ■

2 Consecuencias del Teorema del Valor Medio

En las siguientes secciones estudiaremos diferentes consecuencias directas del teorema del valor medio.

2.1 Crecimiento y Decrecimiento

Una derivada positiva sugiere ritmos de cambios positivos y que por tanto que la variable y aumenta. De la misma forma, una derivada negativa sugiere ritmos de cambios negativos y que por tanto que la variable y disminuye.

Teorema 6 *Sea f diferenciable en el intervalo (a, b).*

1. *Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en (a, b).*
2. *Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en (a, b).*
3. *Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es constante en (a, b).*

Dem.: Sean $a < x_1 < x_2 < b$. Aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo $[x_1, x_2]$ se tiene

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ en particular se tiene $f'(c) > 0$ y por tanto

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

por lo que f es creciente. Los otros resultados se demuestran de forma análoga. ■

Si en la primera condición se substituye $>$ por $\geq$ la función f es nodecreciente. De la misma forma, si en la segunda se substituye $<$ por $\leq$ la función f es nocreciente.

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el siguiente criterio para clasificar los puntos críticos atendiendo al signo de la primera derivada.

Teorema 7 (Criterio de la derivada primera) *Sea c un punto crítico de f y supongamos que f es diferenciable en $(c - r, c) \cup (c, c + r)$ y al menos continua en c.*

1. *Si* $f'(x) > 0$ *en* $c - r < x < c$ *y* $f'(x) < 0$ *en* $c < x < c + r$, *entonces* f *posee un máximo relativo en* c.
2. *Si* $f'(x) < 0$ *en* $c - r < x < c$ *y* $f'(x) > 0$ *en* $c < x < c + r$, *entonces* f *posee un mínimo relativo en* c.
3. *Si* $f'(x)$ *tiene el mismo signo a ambos lados no hay ni máximo ni mínimo.*

2.2 Concavidad y Convexidad

La concavidad o convexidad es una propiedad de las funciones que admite varias interpretaciones geométricas. En el capítulo de funciones presentamos la primera de ellas. Decíamos que una función es cóncava o convexa según que entre dos puntos cualesquiera su gráfica quede enteramente por debajo o enteramente por encima del segmento que los une. Otra forma de expresar esta propiedad hace referencia al cálculo diferencial y traduce la idea de que una función es cóncava o convexa según que su gráfica se tuerza hacia abajo o hacia arriba. Las dos definiciones son equivalentes, la demostración es enteramente técnica y la omitimos.

Definición 8 *Sea* f *una función diferenciable en* (a, b). *Se dice que* f *es* ***cóncava hacia arriba*** *o* ***convexa*** *si* f' *crece en el intervalo* (a, b). *Diremos que es cóncava hacia abajo o símplemente cóncava si* f' *decrece en el intervalo* (a, b).

Las funciones cóncavas también se llaman *cóncavas hacia abajo* y las convexas *cóncavas hacia arriba*.

Supongamos que existen f' y f'' en el intervalo (a, b). Si $f'' > 0$ la pendiente f' crece y f se tuerce hacia arriba. Análogamente, si $f'' < 0$ la pendiente decrece y f se tuerce hacia abajo. De manera formal se puede enunciar el siguiente criterio:

Teorema 9 *Sea* f *diferenciable dos veces en el intervalo* (a, b).

1. *Si* $f''(x) > 0$ *para todo* $x \in (a, b)$, *entonces* f *es cóncava hacia arriba.*
2. *Si* $f''(x) < 0$ *para todo* $x \in (a, b)$, *entonces* f *es cóncava hacia abajo.*

Los puntos en los que habiendo tangente cambie el comportamiento de la gráfica en el sentido de pasar de ser cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba o viceversa se llaman *puntos de inflexión*.

Si c es un punto de inflexión de f y $f''(c)$ existe, mediante un argumento similar al de la condición necesaria de extremo se demuestra que

$$f''(c) = 0.$$

No obstante, no todos los puntos que satisfacen dicha condición son puntos de inflexión, p.e. $f(x) = x^4$ no posee un punto de inflexión en $x = 0$ y en cambio $f''(0) = 0$.

Como consecuencia inmediata del teorema anterior se obtiene el siguiente criterio para clasificar los puntos críticos atendiendo al signo de la derivada segunda.

Teorema 10 (Criterio de la derivada segunda) *Sea f diferenciable en (a,b), $c \in (a,b)$ un punto crítico de f, i.e. $f'(c) = 0$, y supongamos que f'' existe y es continua en (a,b). Entonces,*

1. *Si $f''(c) < 0$, la función f posee un máximo relativo en c.*
2. *Si $f''(c) > 0$, la función f posee un mínimo relativo en c.*
3. *Si $f''(c) = 0$ el criterio anterior no proporciona información.*

2.3 Regla de L'Hopital para el Cálculo de Límites

A veces es necesario determinar el límite de una expresión definida como cociente de otras dos tales que el numerador y el denominador tienden hacia cero simultáneamente. En este caso, no es posible aplicar la regla del cociente. Un límite así se dice que es una *forma indeterminada* del tipo

$$\frac{0}{0}.$$

La regla de L'Hôpital permite calcular estos límites mediante el límite del cociente de las derivadas del numerador y denominador.

Teorema 11 (Regla de L'Hopital) *Sean f y g funciones diferenciables en D. Supongamos que D contiene un intervalo de la forma $(c, c+r)$ y que $g'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. Si*

$$\lim_{x \longrightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow c^+} g(x) = 0$$

y

$$\lim_{x \longrightarrow c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

entonces,

$$\lim_{x \longrightarrow c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Dem.: Extendamos f y g a c de forma continua definiendo o redefiniendo si fuera el caso $f(c) = g(c) = 0$. De esta manera, las funciones f y g cumplen las condiciones del teorema del valor medio generalizado en el intervalo $[c, x]$ para todo $x \in (c, c+r)$. Entonces, existe un $\xi_x \in (c, x)$ tal que

$$[f(x) - f(c)]g'(\xi_x) = f'(\xi_x)[g(x) - g(c)].$$

Como $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (c, c+r)$ también $g(x) - g(c) \neq 0$ y podemos escribir

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Cuando $x \longrightarrow c^+$, $\xi_x \longrightarrow c^+$, luego

$$\lim_{x \longrightarrow c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi_x \longrightarrow c^+} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = L. \qquad \blacksquare$$

En relación con la regla anterior observamos lo siguiente:

1. Con obvias modificaciones la regla anterior es válida para límites por la izquierda $x \longrightarrow c^-$ y en consecuencia también lo es para límites del tipo $x \longrightarrow c$.

2. También es válida para límites infinitos $x \longrightarrow +\infty$ o $x \longrightarrow -\infty$. Basta efectuar el cambio $x = 1/t$ para reducirla al caso $x \longrightarrow 0^+$ o $x \longrightarrow 0^-$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} \\
&= \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{t^2} f'(\frac{1}{t})}{-\frac{1}{t^2} g'(\frac{1}{t})} \\
&= \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.
\end{aligned}$$

3. El límite del cociente f/g puede existir aunque no exista el límite del cociente f'/g'. Por ejemplo, sean

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

y

$$g(x) = x.$$

Observamos que el límite

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \longrightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

no existe, mientras que

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Por tanto la regla de L'Hôpital es útil cuando el límite del cociente de las derivadas exista y sea más fácil de calcular.

4. A veces el límite del cociente de derivadas será más fácil de evaluar pero no lo suficientemente. En este caso, y siempre que se den las condiciones para ello, podremos aplicar la regla de L'Hôpital reiteradamente hasta obtener un límite fácil de evaluar.

La regla anterior es aplicable a límites de cocientes en los que el numerador y el denominador tiendan simultáneamente a infinito no importa el signo. Un límite así se dice que es una forma indeterminada del tipo

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Teorema 12 (Regla de L'Hopital, Forma ∞/∞) *En las condiciones del teorema anterior supongamos que*

$$\lim_{x \longrightarrow c^+} f(x) = \infty; \ \lim_{x \longrightarrow c^+} g(x) = \infty$$

y

$$\lim_{x \longrightarrow c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

entonces,

$$\lim_{x \longrightarrow c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Como en el caso $0/0$ la regla es aplicable a límites por la izquierda, a límites del tipo $x \to c$ y a límites en el infinito.

Otras formas indeterminadas son las formas del tipo

$$0 \cdot \infty \qquad \text{y} \qquad \infty - \infty.$$

Mediante manipulaciones algebraicas estas formas se convierten previamente en formas indeterminadas del tipo $0/0$ o ∞/∞ y después se aplica la regla de L'Hôpital.

Lo mismo ocurre con las formas del tipo

$$0^0 \qquad \text{y} \qquad 1^\infty.$$

Estas se convierten en formas del tipo $0/0$ o ∞/∞ tomando logaritmos y utilizando manipulaciones algebraicas.

Por último formas del tipo ∞^∞, $\frac{\infty}{0}$ y $\frac{0}{\infty}$ no son realmente formas indeterminadas. Las dos primeras tienen valor $\pm\infty$ y la tercera 0.

3 Aplicaciones del Cálculo Diferencial

3.1 Problemas de Máximos y Mínimos

Un gran número de problemas de optimización encontrados en otras ciencias, en la ingeniería o en las propias matemáticas se pueden formular en el sentido de encontrar el punto o los puntos de un intervalo I en los cuales una función f alcanza máximo y mínimo.

La resolución de este tipo de problemas se basa en la condición necesaria de extremo vista anteriormente: Sea f una función definida en un intervalo y c un punto interior al mismo. Si f alcanza un máximo o mínimo relativo en c y es diferenciable en dicho punto, necesariamente

$$f'(c) = 0.$$

Por tanto si f alcanza un máximo o un mínimo en un punto c perteneciente al interior de I o bien $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Definición 13 *Sea f una función real definida en un intervalo abierto* (a, b) *Un punto $c \in (a, b)$ es un* punto crítico *de f sí y solo sí*

$$f'(c) = 0 \qquad o \qquad f'(c) \text{ no existe.}$$

Es decir que los máximos y mínimos de una función definida en un intervalo abierto o en una unión de intervalos abiertos, si existen, se encuentran entre los puntos críticos. Si el intervalo incluyera alguno de sus extremos, los máximos y mínimos pueden alcanzarse también en dichos puntos.

Por consiguiente, los máximos y mínimos de una función en un intervalo I si existen se encuentran entre los puntos críticos o los extremos del intervalo pertenecientes al dominio.

Para analizar si estos puntos corresponden a máximo, a mínimo o a ninguna de las dos cosas necesitaremos de información adicional.

En el caso de que I sea un intervalo cerrado $[a, b]$ y f sea una función continua en dicho intervalo, según el Teorema de Existencia de Máximos y Mínimos podemos asegurar que f alcanza máximo y mínimo absolutos. Puesto que los extremos absolutos son a su vez extremos locales y estos se encuentran entre los puntos críticos o en los extremos del intervalo bastará comparar los valores que f toma en estos puntos y entresacar los correspondientes al mayor y menor valor. Esto permite establecer la siguiente estrategia para resolver problemas de máximo y mínimo en un intervalo cerrado.

Problema 14 *Encontrar el máximo y mínimo absolutos de una función continua $f(x)$ en el intervalo cerrado $I = [a, b]$.*

Solución 15 *Seguir el siguiente procedimiento:*

1. *Determinar los puntos críticos $c_1, c_2, \cdots, c_n$ de f en el interior de I. Es decir,*

   (a) Las soluciones de la ecuación

   $$f'(x) = 0$$

   tales que $a < x < b$; y

   (b) Los puntos del intervalo (a, b) donde f' no exista.

2. *Calcular*

   $$f(a),\ f(c_1),\ f(c_2), \cdots,\ f(c_n)\ y\ f(b).$$

3. *Los puntos de máximo absoluto corresponden al mayor valor de f en la lista anterior y los puntos de mínimo al menor.*

Si se trata de determinar los máximos y mínimos de una función continua en un intervalo que no sea cerrado el problema se complica al no poderse asegurar de antemano la existencia de máximo y mínimo.

Problema 16 *Encontrar, si existen, el máximo y mínimo de una función continua $f(x)$ en un intervalo de la forma (a, b), $[a, b)$ o $(a, b]$ donde a y b pueden ser un número finito cualquiera o eventualmente $-\infty$ y/o $+\infty$.*

Solución 17 *Proceder de la siguiente manera:*

1. *Al igual que en el caso de un intervalo cerrado determinar los puntos críticos pertenecientes al interior del intervalo I.*

2. *Calcular*

   $$y_a,\ f(c_1),\ f(c_2), \cdots,\ f(c_n)\ e\ y_b$$

   siendo

   $$y_a = \lim_{x \to a^+} f(x) \qquad e \qquad y_b = \lim_{x \to b^-} f(x).$$

   Estos límites podrán ser finitos o infinitos.

3. *Si el mayor o menor valor de la lista anterior fuera y_a o y_b no existirán máximo o mínimo absolutos según sea el caso. En caso contrario, existen máximo y mínimo absolutos y estos corresponden al mayor y menor valor de f en la lista anterior.*

Solución 18 *Procedimiento alternativo*

1. *Al igual que en el caso de un intervalo cerrado determinar los puntos críticos pertenecientes al interior del intervalo I.*

2. *Clasificar los puntos críticos mediante el criterio de la primera derivada o el de la segunda derivada según convenga. Recuerde que dichos criterios dicen si se trata de máximos o mínimos locales no absolutos.*

3. *Comprobar si los extremos del intervalo incluidos en el mismo corresponden a máximo o mínimo local analizando el signo de la derivada primera en las proximidades.*

4. *Investigar si alguno de los máximos o mínimos locales son máximos o mínimos absolutos teniendo en cuenta las características particulares de la función.*

3.2 Análisis de Gráficas

Tradicionalmente el cálculo diferencial ha sido la herramienta fundamental para tener un conocimiento de la forma de la gráfica de una función. Pudiera parecer que con la llegada de las computadoras y sus potentes aplicaciones de dibujo de gráficas ya no fuera necesario disponer de procedimientos analíticos para el estudio de las mismas. Esto no es enteramente cierto. Si bien es verdad que con las computadoras es posible obtener un aspecto global de las mismas siempre habrá ocasiones en los que sea necesario recurrir a los resultados clásicos del cálculo por las siguiente razones:

1. La gráfica es una de las posibles formas de representar una función y no es siempre exacta. Las gráficas obtenidas mediante las computadoras a veces resultan distorsionadas espoecialmente cerca de puntos singulares o no resultan suficientemente detalladas cuando se trabaja con intervalos infinitos.

2. En ocasiones es necesario obtener valores numéricos precisos de ciertas características como puntos de máximo, mínimo, valores asintóticos, etc....

3. Los procedimientos analíticos son generalizables a dimensiones superiores mientras que las computadoras solo pueden presentar gráficas en dos o tres dimensiones.

Problema 19 *Llevar a cabo un análisis cualitativo de la gráfica de una función.*

Solución 20 *Estudiar los siguientes aspectos:*

1. *Dominio de la función.*

2. *Intersecciones con los ejes*

   (a) *Las intersecciones con el eje OX son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.*

   (b) *La intersección con el eje OY se produce en $y = f(0)$.*

3. *Paridad o Imparidad*

   (a) *La función es par sí y solo sí $f(-x) = f(x)$ en cuyo caso la gráfica es simétrica respecto del eje OX.*

   (b) *La función es impar sí y solo sí $f(-x) = -f(x)$ en cuyo caso la gráfica es simétrica respecto del origen de coordenadas.*

4. *Discontinuidades, asíntotas verticales y horizontales.*

5. *Calcular f' en aquellos puntos donde f sea diferenciable y determinar*

   (a) *Puntos críticos, i.e. soluciones de $f'(x) = 0$ más puntos donde f' no exista.*

   (b) *Intervalos de crecimiento ($f' > 0$) y decrecimiento ($f' < 0$).*

6. *Calcular f'' y determinar*

   (a) *Intervalos de concavidad hacia arriba ($f'' > 0$) y de concavidad hacia abajo ($f'' < 0$).*

(b) *Puntos de inflexión.*

7. *Evaluar f en los puntos críticos, puntos de inflexión y otros puntos característicos de la función.*

8. *Hacer un esquema de la gráfica con toda la información anterior.*