CAPÍTULO 10

FUNCIONES IMPLÍCITAS

10.1 FUNCIONES IMPLÍCITAS (Áreas 1, 2 y 3)

En el curso de Precálculo del 4º semestre se vieron diferentes clasificaciones de las funciones, entre ellas las *funciones explícitas* y las *funciones implícitas.* Recordando: Una función está escrita en forma *explícita* cuando su variable dependiente (por lo general, la y) está despejada. Los siguientes ejemplos se refieren a funciones escritas en forma *explícita:*

$$y = 3x^2 - 11x - 9$$

$$y = x^2 \, tan\left(x^3 - 22\right)$$

$$y = e^{6x^2}\left(tan\, x - cos\, 2x\right)$$

$$y = \frac{ln\, x}{\sqrt{x^6 - 9x}}$$

Si por el contrario, su variable dependiente (por lo general, la y) no está despejada, se dice que está escrita en forma *implícita.* Los siguientes ejemplos muestran casos de funciones escritas en forma *implícita:*

$$x^3 - y^3 = xy - 8$$

$$tan\left(x - 4y \right) = 3x + y^4$$

$$5x^2 - 7xy + 9x - y^2 + 22y - 6 = 0$$

$$y = arc\ sen \sqrt{x^4 - y^2}$$

Una función escrita en forma implícita puede estar así por dos razones: una, porque la variable dependiente (por lo general, la y) sea algebraicamente imposible despejarla, como cuando aparece como parte de algún argumento al mismo tiempo que no parte de algún argumento. Por ejemplo, en $4y = sen\left(2x - y^2 \right)$ la variable dependiente y aparece como parte del argumento del *seno* y además como no argumento en 4*y*. La otra razón es simplemente porque así convino escribirla, como en $x^2 + 3y + 5 = 0$ (se podría despejar la y)

Para obtener la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ de una función implícita se emplean las mismas fórmulas y las mismas reglas de derivación estudiadas hasta ahora, en donde debe tenerse solamente el cuidado de tratar a la variable dependiente y exactamente como una variable. Dicho de otra forma, la variable dependiente y ocupará el lugar de la u en las fórmulas.

Por ejemplo, para derivar y^3 debe utilizarse la fórmula (6) de la potencia vista en la página 69, en donde $u = y$ y $n = 3$, de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx}y^3 = \underbrace{3}_{n}\ \underbrace{y}_{u}{}^{\overbrace{3-1}^{}_{n\,-\,1}}\ \underbrace{\frac{d}{dx}y}_{\frac{du}{dx}}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\frac{d}{dx}y^3 = 3y^2\frac{dy}{dx}}$$

Para derivar, por ejemplo, x^6y^3 debe emplearse la fórmula (7) del producto uv vista en la página 77, en donde $u = x^6$ y $v = y^3$, de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx}x^6y^3 = \underbrace{x^6}_{u}\ \underbrace{\frac{d}{dx}y^3}_{\frac{dv}{dx}} + \underbrace{y^3}_{v}\ \underbrace{\frac{d}{dx}x^6}_{\frac{du}{dx}}$$

Para derivar y^3 debe seguirse el procedimiento visto en la página anterior. Por lo tanto,

$$= x^6\left[3y^2\frac{d}{dx}y\right] + y^3\left[6x^5\right]$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}x^6y^3 = 3x^6y^2\frac{dy}{dx} + 6x^5y^3}$$

En general, para obtener la derivada $\frac{dy}{dx}$ de cualquier función implícita deben derivarse ambos miembros de la igualdad aplicando las fórmulas ya estudiadas y luego despejar $\frac{dy}{dx}$, lo cual puede detallarse en la siguiente regla:

Para derivar funciones implícitas:

1) ***Derivar ambos miembros de la igualdad, aplicando las mismas fórmulas antes vistas.***
2) ***Despejar*** $\frac{dy}{dx}$ ***, para lo cual:***
   a) ***Escribir en el lado izquierdo de la igualdad todos los términos que contengan a la derivada y del lado derecho todos los términos que no la contengan.***
   b) ***Factorizar en el lado izquierdo*** $\frac{dy}{dx}$ **.**
   c) ***Despejar*** $\frac{dy}{dx}$***, dividiendo en el lado derecho el factor que le multiplica.***

Ejemplo 1: Obtener $\frac{dy}{dx}$ si $5xy^7 - y^3 = 9x + 4y$

Solución: Paso 1: Aplicando el operador derivada en ambos miembros de la igualdad

$$\frac{d}{dx}\left(5xy^7 - y^3\right) = \frac{d}{dx}\left(9x + 4y\right)$$

$$\frac{d}{dx}5xy^7-\frac{d}{dx}y^3=\frac{d}{dx}9x+\frac{d}{dx}4y$$

$$\frac{d}{dx}\underbrace{\left(5xy^7\right)}\;-\;\frac{d}{dx}\underbrace{y^3}\;=\;\frac{d}{dx}9x+\frac{d}{dx}\underbrace{4y}$$

son de la forma: $\quad uv \qquad\qquad u^n \qquad\qquad c\,\dfrac{du}{dx}$

$$\underbrace{5x}_{u}\underbrace{\frac{d}{dx}y^7}_{\frac{dv}{dx}}\;+\;\underbrace{y^7}_{v}\underbrace{\frac{d}{dx}5x}_{\frac{du}{dx}}\;-\;\underbrace{3}_{n}\,\underbrace{y}_{u}^{\underbrace{3-1}_{n-1}}\underbrace{\frac{d}{dx}y}_{\frac{du}{dx}}\;=\;9+4\frac{dy}{dx}$$

$$5x\left[7y^6\,\frac{dy}{dx}\right]+y^7\left[5\right]-3y^2\,\frac{dy}{dx}=9+4\frac{dy}{dx}$$

$$35xy^6\,\frac{dy}{dx}+5y^7-3y^2\,\frac{dy}{dx}=9+4\frac{dy}{dx}$$

Paso 2a: Escribiendo en el lado izquierdo todos los términos que contengan a la derivada y del lado derecho los que no lo contengan:

$$35xy^6\,\frac{dy}{dx}-3y^2\,\frac{dy}{dx}-4\frac{dy}{dx}=9-5y^7$$

Paso 2b: Factorizando $\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}\left(35xy^6 - 3y^2 - 4\right) = 9 - 5y^6$$

Paso 2c: Despejando $\dfrac{dy}{dx}$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{9 - 5y^7}{35xy^6 - 3y^2 - 4}}$$

Ejemplo 2: Calcular la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = x\,ln\,y + sen\,3x$

Solución: Debe tenerse cuidado con casos como éste. Aparentemente la variable y está despejado por aparecer del lado izquierdo como único término, pero realmente no está despejada por el hecho de volver a aparecer en el lado derecho. Por lo tanto, es una función implícita.

Paso 1: Derivando en ambos lados de la igualdad

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\left(x\,ln\,y + sen\,3x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{x\,ln\,y} + \frac{d}{dx}\underbrace{sen\,3x}$$

son de la forma uv $sen\,u$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{x}_{u}\underbrace{\frac{d}{dx}ln\, y}_{\frac{dv}{dx}} + \underbrace{ln\, y}_{v}\underbrace{\frac{d}{dx}x}_{\frac{du}{dx}} + \underbrace{cos\,3x}_{cos\, u}\underbrace{\frac{d}{dx}3x}_{\frac{du}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = x\left[\frac{\frac{d}{dx}y}{y}\right] + ln\, y[1] + cos\,3x[3]$$

$$\frac{dy}{dx} = x\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{y}\right] + ln\, y + 3\,cos\,3x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + ln\, y + 3cos\,3x$$

Escribiendo en el lado izquierdo los términos que contienen a la derivada y del derecho los que no la contienen

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = ln\, y + 3cos\,3x$$

factorizando la derivada:

$$\frac{dy}{dx}\left(1 - \frac{x}{y}\right) = ln\, y + 3cos\,3x$$

y finalmente despejando la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ln\, y + 3cos\,3x}{1 - \dfrac{x}{y}}$$

Por las reglas de escritura, como no debe dejarse el resultado como una fracción compleja, es decir, fracción sobre fracción, entonces para quitar el denominador parcial y basta multiplicar numerador y denominador por y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\left(ln\, y + 3cos\,3x\right)}{y\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y\, ln\, y + 3y\, cos\,3x}{y - x}}$$

Ejemplo 3: Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ si $3x^2 + 5y^3 - 4x - y + 3 = 0$

Solución: Derivando en ambos lados:

$$\frac{d}{dx}3x^2 + \frac{d}{dx}5y^3 - \frac{d}{dx}4x - \frac{d}{dx}y + \frac{d}{dx}3 = \frac{d}{dx}0$$

$$6x + 15y^2\frac{dy}{dx} - 4 - \frac{dy}{dx} = 0$$

Escribiendo en el lado izquierdo los términos que contienen a la derivada y del derecho los que no la contienen:

$$15y^2 \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 4 - 6x$$

Factorizando la derivada:

$$\frac{dy}{dx}\left(15y^2 - 1\right) = 4 - 6x$$

y finalmente despejando la derivada:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 6x}{15y^2 - 1}}$$

EJERCICIO 16 (Áreas 1, 2 y 3)

Obtener la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones implícitas:

1) $4xy^8 = 5x^2 - 7y$

2) $6y + 3x = 9 - 4x^2y^3$

3) $y^2 - y = x^2 - x$

4) $11x^6y - 11xy^6 = 3x - 12$

5) $2xy - 7x + 6y = y^3 - 8x^5$

6) $x^3 - y^4 = 4x^6y^2$

7) $y = 2x^3 + 7y^6$

8) $y = y^4 - x^4$

9) $y = e^x + e^y$

10) $y = \dfrac{2x}{3y} - x^7$

11) $ln\, y + ln\, x = y - x$

12) $ln\, xy = xy$

13) $sen\ xy = xy$

14) $cos\left(2x - 3y\right) = 2x - 3y$

15) $tan\left(x^2 - 3y\right) = x^2 + 3y$

16) $\dfrac{x}{y} - \dfrac{y^2}{x^2} = 0$

17) $\sqrt{x - y} = xy$

18) $y\, ln\, x + x\, ln\, y = 0$