CONTINUIDAD

1. La función $f(x)=\dfrac{x-1}{x^3+x^2-5x-2}$ ¿Es continua en el punto x = 2?. Calcular los límites laterales en 2.

Solución.

Para que la función sea continua en x = 2 se debe cumplir:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

Calculamos por separado cada miembro de la igualdad

$$f(2)=\frac{2-1}{2^3+2^2-5\cdot 2-2}=\frac{1}{0}=\infty\notin R \Rightarrow f(2) \text{ no existe}$$

Para que una función tenga límite en un punto, deben existir los límites laterales y además ser iguales.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-1}{(x-2)\cdot\left(x^2+3x+1\right)}=\dfrac{2-1}{\left(2^- -2\right)\cdot\left(2^2+3\cdot 2+1\right)}=\dfrac{1}{0^-\cdot 11}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-1}{(x-2)\cdot\left(x^2+3x+1\right)}=\dfrac{2-1}{\left(2^+ -2\right)\cdot\left(2^2+3\cdot 2+1\right)}=\dfrac{1}{0^+\cdot 11}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\end{cases}:$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim_{x\to 2^+} f(x)\Rightarrow \text{No existe } \lim_{x\to 2} f(x)$$

La función f(x) tiene una discontinuidad no evitable de salto infinito en x = 2

2. Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2+2x-3}$

Solución.

La continuidad de una función se estudia en los puntos excluidos del dominio y en lo puntos frontera en el caso de funciones por intervalos.

$$D\left[\frac{x^2+4}{x^2+2x-3}\right]=\left\{x\in R\ /\ x^2+2x-3\neq 0\right\}$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado

$$x^2+2x-3=0:\begin{cases}x=-3\\ x=1\end{cases}$$

$$D\left[\frac{x^2+4}{x^2+2x-3}\right]=R-\{-3,1\}$$

- Continuidad en x = –3.

Para que la función sea continua en x = –3 se debe cumplir:

$$\lim_{x\to -3} f(x)=f(-3)$$

Calculamos por separado cada miembro de la igualdad

$$f(-3)=\frac{(-3)^2+4}{(-3)^2+2\cdot(-3)-3}=\frac{13}{0}=\infty\notin R\Rightarrow f(-3) \text{ no existe}$$

Para que una función tenga límite en un punto, deben existir los límites laterales y además ser iguales.

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{x^2+4}{(x+3)\cdot(x-1)}=\dfrac{(-3)^2+4}{\left(-3^-+3\right)\cdot(-3-1)}=\dfrac{13}{0^-\cdot(-4)}=\dfrac{13}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{x^2+4}{(x+3)\cdot(x-1)}=\dfrac{(-3)^2+4}{\left(-3^++3\right)\cdot(-3-1)}=\dfrac{13}{0^+\cdot(-4)}=\dfrac{13}{0^-}=-\infty\end{cases}:$$

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) \neq \lim_{x\to -3^+} f(x) \Rightarrow \text{No existe } \lim_{x\to -3} f(x)$$

La función f(x) tiene una discontinuidad no evitable de salto infinito en $x = -3$

- Continuidad en $x = 1$.

Para que la función sea continua en $x = 1$ se debe cumplir:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

Calculamos por separado cada miembro de la igualdad

$$f(1) = \frac{1^2+4}{1^2+2\cdot 1-3} = \frac{1}{0} = \infty \notin R \Rightarrow f(1) \text{ no existe}$$

Para que una función tenga límite en un punto, deben existir los límites laterales y además ser iguales.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \dfrac{x^2+4}{(x+3)\cdot(x-1)} = \dfrac{1^2+4}{(1+3)\cdot(1^- -1)} = \dfrac{5}{4\cdot 0^-} = \dfrac{5}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+4}{(x+3)\cdot(x-1)} = \dfrac{1^2+4}{(1+3)\cdot(1^+ -1)} = \dfrac{13}{4\cdot 0^+} = \dfrac{13}{0^+} = +\infty \end{cases} :$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \text{No existe } \lim_{x\to 1} f(x)$$

La función f(x) tiene una discontinuidad no evitable de salto infinito en $x = 1$

3. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x \le -\pi/2 \\ m\cdot\text{sen } x + n & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 2\cdot\cos x & \text{si } x \ge \pi/2 \end{cases}$. Determinar m y n de modo que sea continua para todo x.

Solución.

Por ser una función por intervalos definida por expresiones continuas, la continuidad se estudia en los puntos frontera $\left(x = -\dfrac{\pi}{2} \ \text{ y } \ x = \dfrac{\pi}{2}\right)$

Para que la función sea continua en $x = -\pi/2$:

$$\lim_{x\to -\pi/2^-} f(x) = \lim_{x\to -\pi/2^+} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

Para calcular estos límites hay que tener en cuenta las expresiones de la función por la izquierda (valores menores) y la derecha (valores mayores) de $x = -\pi/2$

- Sí $x \to -\pi/2^- \Rightarrow x < -\pi/2$ y $f(x) = \text{sen } x$
- Sí $x \to -\pi/2^+ \Rightarrow x > -\pi/2$ y $f(x) = m\cdot\text{sen } x + n$
- Sí $x = -\pi/2 \Rightarrow f(x) = \text{sen } x$

Sustituyendo en la igualdad:

$$\lim_{x\to -\pi/2^-} \text{sen } x = \lim_{x\to -\pi/2^+} (m\cdot\text{sen } x + n) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

Resolviendo los límites se obtiene una ecuación con dos incógnitas

$$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = m\cdot\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + n = -1$$

$$\boxed{-m+n=-1}$$

Repitiendo el mismo proceso en $x = \pi/2$, se obtiene una segunda ecuación con las mismas incógnitas, por lo que se puede plantear un sistema y hallar los valores de m y n.

Para que la función sea continua en x = π/2:

$$\lim_{x\to \pi/2^-} f(x) = \lim_{x\to \pi/2^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Para calcular estos límites hay que tener en cuenta las expresiones de la función por la izquierda (valores menores) y la derecha (valores mayores) de x = –π/2

- Sí $x \to \pi/2^- \Rightarrow x < \pi/2$ y $f(x) = m\cdot \text{sen}\, x + n$
- Sí $x \to \pi/2^+ \Rightarrow x > \pi/2$ y $f(x) = 2\cos x$
- Sí $x = \pi/2 \Rightarrow f(x) = 2\cos x$

Sustituyendo en la igualdad:

$$\lim_{x\to \pi/2^-} (m\cdot \text{sen}\, x + n) = \lim_{x\to \pi/2^+} 2\cos x = 2\cos\frac{\pi}{2}$$

Resolviendo los límites se obtiene una ecuación con dos incógnitas

$$= m\cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2} + n = 2\cos\frac{\pi}{2} = 2\cdot 0 = 0$$

$$\boxed{m + n = 0}$$

Los valores de m y n se obtienen mediante el sistema:

$$\begin{cases} -m + n = -1 \\ m + n = 0 \end{cases} : \text{Sol. } m = \frac{1}{2},\ n = -\frac{1}{2}$$

Para que la función sea continua su expresión debe ser:

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}\, x & \text{si } x \le -\pi/2 \\ \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\, x - \tfrac{1}{2} & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 2\cos x & \text{si } x \ge \pi/2 \end{cases}.$$

4. Determinar los puntos de discontinuidad de las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ y $g(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2}$ indicando gráficamente el comportamiento de cada una de ellas en un entorno de los puntos de discontinuidad.

Solución.

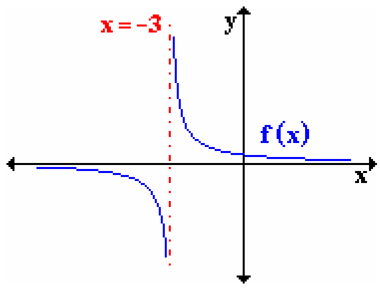
$$f(x) = \frac{1}{x+3} \qquad D[f(x)] = R - \{3\} \qquad f(-3) = \frac{1}{-3+3} = \frac{1}{0} = \infty$$

Comportamiento lateral:

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{3^- + 3} = \dfrac{1}{0^-} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{3^+ + 3} = \dfrac{1}{0^+} = \dfrac{1}{0^-} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) \ne \lim_{x\to -3^+} f(x) \Rightarrow \text{No } \exists \lim_{x\to -3} f(x)$$

Discontinua no evitable



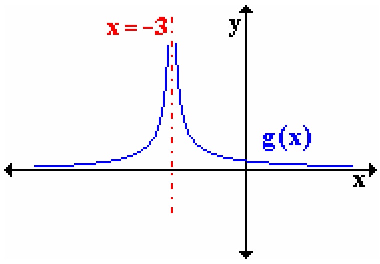
$g(x)=\dfrac{1}{(x+3)^2} \quad D[g(x)]=R-\{3\} \quad g(-3)=\dfrac{1}{(-3+3)^2}=\dfrac{1}{0^2}=\infty$

Comportamiento lateral:

$$\underset{x\to -3}{\text{Lím}}\ f(x)=\begin{cases}\underset{x\to -3^-}{\text{Lím}}\ g(x)=\underset{x\to -3^-}{\text{Lím}}\ \dfrac{1}{(x+3)^2}=\dfrac{1}{\left(3^-+3\right)^2}=\dfrac{1}{\left(0^-\right)^2}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\\ \underset{x\to -3^+}{\text{Lím}}\ f(x)=\underset{x\to -3^-}{\text{Lím}}\ \dfrac{1}{(x+3)^2}=\dfrac{1}{\left(3^++3\right)^2}=\dfrac{1}{\left(0^+\right)^2}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\end{cases}$$

$$\underset{x\to -3^-}{\text{Lím}}\ f(x)=\underset{x\to -3^+}{\text{Lím}}\ f(x)\Rightarrow \exists\ \underset{x\to -3}{\text{Lím}}\ f(x)=\infty$$

Discontinua no evitable



5. Estudiar en el campo real la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{e^x+1} & \text{si}\quad x\le 0\\ x^2+1 & \text{si}\quad x>0\end{cases}$.

Solución.

La función está definida por expresiones continuas, por lo cual el único punto donde se debe estudiar la continuidad es en el punto frontera (x = 0).

Para que la función sea continua en x = 0 se debe cumplir:

$$f(0)=\underset{x\to 0^-}{\text{Lím}}\ f(x)=\underset{x\to 0^+}{\text{Lím}}\ f(x)$$

$$\underset{x\to 0^-}{\text{Lím}}\ \frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^0}{e^0+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\underset{x\to 0}{\text{Lím}}\left(x^2+1\right)=0^2+1=1$$

$$\underset{x\to 0^-}{\text{Lím}}\ f(x)\ne\underset{x\to 0^+}{\text{Lím}}\ f(x)$$

La función presenta una discontinuidad no evitable en cero por carecer de límite en ese punto (sus límites laterales son distintos)

6. Determinar a y b para que la función $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{Si}\quad x<0\\ ax+b & \text{Si}\quad 0\le x\le 3\\ 5-x & \text{Si}\quad x>3\end{cases}$ sea continua.

Solución.

La función está definida por expresiones continuas, por lo cual los únicos puntos donde se debe estudiar la continuidad es en los puntos frontera (x = 0; x = 3).

Para que la función sea continua en x = 0 se debe cumplir:

$$f(0)=\underset{x\to 0^-}{\text{Lím}}\ f(x)=\underset{x\to 0^+}{\text{Lím}}\ f(x)$$

$$a\cdot 0+b=\underset{x\to 0^-}{\text{Lím}}\left(x^2+1\right)=\underset{x\to 0^+}{\text{Lím}}\left(ax+b\right)$$

$$b=0^2+1:\ b=1$$

Para que la función sea continua en x = 3 se debe cumplir:

$$f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

$$a\cdot 3 + b = \lim_{x\to 3^-} (ax+b) = \lim_{x\to 3^+} (5-x)$$

$$3a + b = 5 - 3:\ 3a + b = 2$$

Las condiciones de continuidad en 0 y 3 permiten plantear un sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} b = 1 \\ 3a + b = 2 \end{cases} : a = \frac{1}{3}$$

Para que la función sea continua en todo R deberá tener la expresión:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{Si} \quad x < 0 \\ \frac{x}{3} + 1 & \text{Si} \quad 0 \le x \le 3 \\ 5 - x & \text{Si} \quad x > 3 \end{cases}$$

7. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \text{Ln}\, x & \text{Sí} \quad 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & \text{Sí} \quad 1 \le x < \infty \end{cases}$. Determinar los valores de a y b para que f(x) sea continua y f (2) = 3. (Ln = logaritmo neperiano).

Solución.

Para que la función sea continua en el intervalo (0, +∞), debe se continua en su punto frontera (x = 1), en los demás puntos del intervalo es continua por definición. (Ln x es continua por definición en (0, +∞); $ax^2 + b$ es continua en todo R)

Para que la función sea continua en x = 1 se debe cumplir:

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\text{Ln}\, 1 = \lim_{x\to 1^-} \text{Ln}\, x = \lim_{x\to 1^+} \left(ax^2 + b\right)$$

$$\text{Ln}\, 1 = a\cdot 1^2 + b : a + b = 0$$

La segunda relación entre los parámetros se obtiene del dato f (2) = 3.

$$f(2) = a\cdot 2^2 + b = 3:\ 4a + b = 3$$

Las dos relaciones permiten plantear un sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 4a + b = 3 \end{cases} : a = 1; b = -1$$

Para que la función sea continua y cumpla que f (2) = 3, su expresión debe ser:

$$f(x) = \begin{cases} \text{Ln}\, x & \text{Sí} \quad 0 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{Sí} \quad 1 \le x < \infty \end{cases}$$

8. Estudiar para qué valores de "a" la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{Sí} \quad x \le a \\ x + 2 & \text{Sí} \quad x > a \end{cases}$ es continua.

Solución.

Para que la funciones continua en todo R, debe ser continua en a (Punto frontera). Para que la función sea continua en x = a, debe cumplir:

$$f(a) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

$$a^2 = \lim_{x\to a^-} x^2 = \lim_{x\to a^+} (x+2)$$

$a^2 = a + 2$: $a^2 - a - 2 = 0$: resolviendo por la ecuación de segundo grado: $\begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$

9. Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\text{Lnx}} & \text{si } x\neq 1\\ 1 & \text{si } x=1\end{cases}$ estudiar la continuidad en el punto x = 1.

Solución.

Para que f (x) sea continua en x = 1 es necesario y suficiente que:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=1$$

por lo tanto habrá que obtener el $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln\ x}\right)$ y ver si es o no igual a 1.

Para obtener el límite anterior se aplica la regla de L'Hôpital,, y para ello se debe poner en forma de cociente:

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln\ x}=\frac{\ln\ x - x+1}{(x-1)\ln\ x}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\ x-x+1}{(x-1)\ln\ x}\underset{L'H}{\overset{(0/0)}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{1\cdot\ln\ x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{\ln\ x+(x-1)}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\cdot\ln\ x+(x-1)}\underset{L'H}{\overset{(0/0)}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{1\cdot\ln\ x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\ln\ x+2}=-\frac{1}{2}$$

La función no es continua en $x=1$ por que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\dfrac{1}{2}\neq f(1)$.

10. Sea $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}-1}{x}$

a) Dominio de f

b) Valor que hay que asignarse a f(0) para que la función esté definida y sea continua en el intervalo cerrado [–½,½].

Solución.

a) El dominio de la función debe cumplir dos condiciones:

1. 1 + x > 0, para que exista la raíz y no la anula (esta en el denominador)
2. x ≠ 0, para no anular el denominador.

$$D=\left\{\begin{matrix} x+1>0\Rightarrow x>-1\\ x\neq 0\end{matrix}\right\}=(-1,+\infty)-\{0\}$$

b) Para que la función sea continua en cero debe cumplir:

$$f(0)=\underset{x\to 0}{\text{Lím}}\, f(x)=\underset{x\to 0}{\text{Lím}}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-1}{x}=\underset{x\to 0}{\text{Lím}}\frac{(1+x)^{-1/2}-1}{x}\underset{L'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\underset{x\to 0}{\text{Lím}}\frac{-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot-0}{1}=\underset{x\to 0}{\text{Lím}}-\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}=$$

$$=-\frac{1}{2}(1+0)^{-3/2}=-\frac{1}{2}$$

La expresión de la función es:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-1}{x} & \text{Sí}\quad x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]-\{0\}\\ -\dfrac{1}{2} & \text{Si}\quad x=0\end{cases}$$

11. Determinar los valores de a y b, y el valor de f(0) para que la función f(x), que se define a continuación, pueda ser continua:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{ax^2} & \text{Sí} \quad x<0\\ b\cdot x^x & \text{Sí} \quad 0<x\le 1\\ \dfrac{x^2+x-1}{x} & \text{Sí} \quad x>1\end{cases}$$

Solución.

Las condiciones de continuidad en x = 0 y en x = 1 permiten calcular los parámetros a y b.

Se empieza por x = 1, para calcular el valor de b. Para que la función sea continua en x = 1 se debe cumplir:

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$b\cdot 1^1=\lim_{x\to 1^-}\left(b\cdot x^x\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-1}{x}$$

$$b\cdot 1^1=\frac{1^2+1-1}{1} : b=1$$

Teniendo en cuenta el valor de b, para que sea continua en x = 0 se bebe cumplir:

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{ax^2}=\lim_{x\to 0^+}\left(x^x\right)$$

Los límites se calculan por separado:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{ax^2}\underset{L'H}{\overset{(0/0)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{2ax}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2ax}\underset{L'H}{\overset{(0/0)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot 2}{2a}=\frac{\cos(2\cdot 0)\cdot 2}{2a}=\frac{1}{a}$$

$\lim_{x\to 0}\left(x^x\right)=0^0=?$ Indeterminación que se resuelve igualando el límite a K y tomando logaritmos neperianos en los dos miembros de la igualdad, lo cual permitan bajar la x del exponente y transformar la indeterminación a $0\cdot\infty$, indeterminación que a su vez se transforma en $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\text{Si } \lim_{x\to 0}\left(x^x\right)=K \Rightarrow \operatorname{Ln} K=\operatorname{Ln}\left[\lim_{x\to 0}\left(x^x\right)\right]=\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{Ln} x^x\right)=\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\operatorname{Ln} x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Ln} x}{1/x}\underset{L'H}{\overset{(\infty/\infty)}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0}(-x)=0=\operatorname{Ln} K \Rightarrow k=e^0=1$$

Calculados los límites laterales se igualan y se calcula el valor de a y de f (0).

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{ax^2}=\frac{1}{a}=\lim_{x\to 0^+}\left(x^x\right)=1\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{a}=1 : a=1\\ f(0)=1\end{cases}$$

Sustituyendo se obtiene la expresión de la función. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} & \text{Sí} \quad x<0\\ 1 & \text{Sí} \quad x=0\\ x^x & \text{Sí} \quad 0<x\le 1\\ \dfrac{x^2+x-1}{x} & \text{Sí} \quad x>1\end{cases}$

12. Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\dfrac{e^{1/|x|}}{1+e^{1/|x|}}$. Calcular el valor que ha de asignarse a f(O) para que f sea continua. Nota. La notación |a| representa el valor absoluto de a.

Solución.

Lo primero será quitar los valores absolutos trasformando la expresión por intervalos, teniendo en cuenta que no existe que no existe la división por cero.

$$f(x)=\frac{e^{1/|x|}}{1+e^{1/|x|}}=\begin{cases}\dfrac{e^{-1/x}}{1+e^{-1/x}} & \text{sí} \quad x<0\\ K & \text{sí} \quad x=0\\ \dfrac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} & \text{sí} \quad x>0\end{cases}$$

Para que la función sea continua en cero se debe cumplir:

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Sustituyendo por la expresión de cada uno

$$K=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-1/x}}{1+e^{-1/x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$$

Calculo de límites:

- $$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-1/x}}{1+e^{-1/x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{e^{1/x}}}{\frac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{e^{1/x}+1}=\frac{1}{e^{1/0^-}+1}=\frac{1}{e^{-\infty}+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}\overset{*}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{1}{e^{1/x}}+1}=\frac{1}{\frac{1}{e^{1/0}}+1}=\frac{1}{\frac{1}{\infty}+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

* La transformación se hace dividiendo numerador y denominador por $e^{1/x}$.

$$f(0)=1$$

La expresión de la función es:

$$f(x)=\frac{e^{1/|x|}}{1+e^{1/|x|}}=\begin{cases}\dfrac{e^{-1/x}}{1+e^{-1/x}} & \text{sí} \quad x<0\\ 1 & \text{sí} \quad x=0\\ \dfrac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} & \text{sí} \quad x>0\end{cases}$$

13. Para qué valores de x tiene sentido la expresión $f(x)=\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}-\sqrt{8}$. ¿Es continua la función f?

Solución.

Se pide el dominio de la función.

$$D(f(x))=\begin{Bmatrix}4+x\ge 0: x\ge -4\\ 4-x\ge 0: x\le 4\end{Bmatrix}=[-4,4]$$

La función es continua en [–4, 4].

14. (Calificación máxima: 2 puntos). En cada uno de los siguientes apartados indicar un ejemplo que muestre que el enunciado es falso. Justificar la respuesta

a) **(1 punto)** La suma de dos funciones discontinuas es una función discontinua

b) **(1Punto)** Toda función continua es derivable

Solución.

a. Falso. $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$: $g(x)=\frac{-1}{x-1}$. f(x) y g(x) tienen una discontinuidad no evitable en x = 1, debido a que en este punto los límites laterales de ambas funciones son distintos y por tanto no tienen límite.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x-1}=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1^2}{1^- -1}=\frac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1^2}{1^+ -1}=\frac{1}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{No existe } \lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x-1}.\ \text{Discontinua no evitable}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-x}{x-1}=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-x}{x-1}=\frac{-1}{1^- -1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-x}{x-1}=\frac{-1}{1^+ -1}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{No existe } \lim_{x\to 1}\frac{-x}{x-1}.\ \text{Discontinua no evitable}$$

$$f(x)+g(x)=\frac{x^2}{x-1}+\frac{-1}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}=x+1\ \text{Continua en todo R por ser polinómica.}$$

b. Falso. f(x) = |x|. Continua en todo R pero no derivable en x = 0.

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & \text{Si}\quad x<0\\ x & \text{Si}\quad x\ge 0\end{cases}$$

En x = 0: $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}-x=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+}x=0\end{array}\right.\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0.\ \text{Continua}$

$$f'(x)=|x|=\begin{cases}-1 & \text{Si}\quad x<0\\ 1 & \text{Si}\quad x>0\end{cases} : f'\left(0^-\right)=-1\ne f'\left(0^+\right)=1.\ \text{No derivable}$$

15. Un comediante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra la cantidad de 5 pesetas. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, decide disminuir el precio por unidad y por cada x unidades cobra la siguiente cantidad:

$$C(x)=\begin{cases}5x & \text{Si}\quad 0<x\le 10\\ \sqrt{ax^2+500} & \text{Si}\quad x>10\end{cases}$$

Se pide:

a) Hallar a para que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran "muchísimas" unidades?

Solución.

a. Para que la función sea continua en x = 10:

$$f(10)=\lim_{x\to 10^-}f(x)=\lim_{x\to 10^+}f(x)$$

$$5\cdot 10=\lim_{x\to 10^-}5x=\lim_{x\to 10^+}\sqrt{ax^2+500}$$

$$50=\sqrt{a\cdot 10^2+500}$$

Elevando al cuadrado se despeja el valor de a.

$$50^2=100a+500 :\ 2500=100a+500 :\ a=20$$

$$C(x)=\begin{cases}5x & \text{Si}\quad 0<x\le 10\\ \sqrt{20x^2+500} & \text{Si}\quad x>10\end{cases}$$

b. El precio por unidad (U(x)) viene expresado por:

$$U(x)=\frac{C(x)}{x}$$

El precio por unidad cuando se compran "muchísimas", viene expresado por:

$$\lim_{x\to\infty} U(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{C(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{20x^2+500}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{20x^2+500}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{20+\frac{500}{x^2}}=\sqrt{20+\frac{500}{\infty^2}}=\sqrt{20}$$

TEOREMA DE BOLZANO

1. Probar que la función $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 2$ tiene al menos una raíz real en el intervalo (1,2).

Solución.

f(x) es continua por tratarse de una función polinómica, además:

$$f(1) = 1^3 + 1^2 - 5\cdot 1 - 1 = -4 : \ f(2) = 2^3 + 2^2 - 5\cdot 2 - 1 = 1$$

La función cumple el teorema de Bolzano en el intervalo [1, 2], la función es continua por ser polinómica y cambia de signo en los extremos del intervalo, $f(1) < 0$, $f(2) > 0$; por lo tanto existe al menos un valor $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$

2. Calcular $n \in Z$, tal que $f(c) = 0$ para algún $c \in (n, n + 1)$ siendo:

a) $f(x) = x^3 - x + 3$

b) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$.

Solución.

Por tratarse de funciones polinómicas, continuas en todo R, bastará con encontrar dos valores enteros consecutivos en los que la función cambie de signo.

a. $f(-2) = (-2)^3 - (-2) + 3 = -3$; $f(-1) = (-1)^3 - (-1) + 3 = 3 \Rightarrow c \in (-2, -1)$.

b. $f(x) = (-5)^5 + 5(-5)^4 + 2(-5) + 1 = -9$; $f(x) = (-4)^5 + 5(-4)^4 + 2(-4) + 1 = 249 \Rightarrow c \in (-5, -4)$.

3. Explicar por qué una función polinómica de grado impar tiene siempre una raíz, al menos.

Solución.

Todas las funciones polinómicas son continua en R, sí además es de grado impar, los límites en $\pm\infty$ tienen distinto signo, por lo tanto, siempre existirá un intervalo $[-M, M]$ en el que la función cambie de signo y cumpla el teorema de Bolzano, existiendo un valor $c \in (-M, M)$ en el que $f(c) = 0$.

4. Probar que la función $f(x) = x + \text{sen } x - 1$ es continua para todo R. Probar que al menos tiene una raíz real.

Solución.

La función f(x) se puede expresar como suma de las funciones $g(x) = x - 1$, y $h(x) = \text{sen } x$. g(x) por ser polinómica y h(x) por ser trigonométrica del tipo seno, son continuas por definición. El álgebra de las funciones continuas dice que la suma de dos funciones continuas es otra función continua, por lo tanto f (x) es continua por ser suma de funciones continuas.

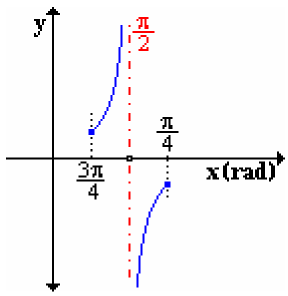
Para demostrar que f(x) tiene una raíz real, siendo continua, basta con encontrar un intervalo en el que la función cambie de signo.

$$f(0) = 0 + \text{sen } 0 - 1 = -1 < 0$$
$$f(1) = 1 + \text{sen } 1 - 1 = \text{sen } 1 > 0$$
$$\exists\, c \in (0, 1) \text{ tal que } f(c) = 0$$

5. La función $\text{tg } x = f(x)$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ y sin embargo no se anula en él. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

Solución.

No contradice el teorema de Bolzano puesto que la función $f(x) = \text{tg } x$ no es continua en el intervalo propuesto.



El dominio de la función es $R - \left\{\frac{\pi}{2} + \pi\cdot k\right\}; \forall k \in Z$. $\frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{tg}\frac{\pi}{2} \notin R$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\pi/2^-} \text{tg } x = \text{tg}\frac{\pi}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\pi/2^+} \text{tg } x = \text{tg}\frac{\pi}{2} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{No} \ \exists \lim\limits_{x\to\pi/2} \text{tg } x$$

La función presenta una discontinuidad no evitable en $\pi/2$

6. Supongamos que f(x) y g(x) son funciones continuas en [a, b] y que f(a) < g(a) pero que en cambio f(b) > g(b). Probar que f(c) = g(c) para algún número c ∈ (a, b).

Solución.

Es una cuestión teórico práctica con un componente bastante elevado de **"idea feliz"**.

Partiendo de lo que se pide demostrar:

$$f(c) = g(c)$$

También debe cumplir:

$$f(c) - g(c) = 0$$

A la vista de lo que se pide demostrar, se define H(x) = f(x) – g(x). La función H(x) es continua en el intervalo [a, b] por ser resta de dos funciones continuas en este intervalo, además:

- $f(a) < g(a) \Rightarrow H(a) = f(a) - g(a) < 0$
- $f(b) < g(b) \Rightarrow H(b) = f(b) - g(b) < 0$

H(x) alcanza en los extremos del intervalo valores de signo opuesto.

Conclusión: Siendo H(x) continua en el intervalo [a, b], y alcanzando valores de signo contrario en los extremos del intervalo, el teorema de Bolzano asegura la existencia de al menos un punto interior del intervalo donde se anula la función.

$$\exists\, c \in (a, b) / H(c) = 0$$

Teniendo en cuenta la expresión de la función:

$$H(c) = f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c)$$

7. Supongamos que f(x) es una función continua en [0, 1] y que 0 < f(x) < 1 para todo x existente en [0, 1]. Probar que existe un c ∈ (0, 1) tal que f(c) = c.

Solución.

Partiendo de lo que se pide demostrar:

$$f(c) = c$$

También debe cumplir:

$$f(c) - c = 0$$

A la vista de lo que se pide demostrar, se define H(x) = f(x) – x. La función H(x) es continua en el intervalo [0, 1] por ser resta de dos funciones continuas en este intervalo, f(x) lo es por los datos del enunciado y "x" lo es por ser una función polinómica. Además:

- $\forall\, x \in [0, 1]\ f(x) > 0 \Rightarrow H(0) = f(0) - 0 > 0$
- $\forall\, x \in [0, 1]\ f(x) < 1 \Rightarrow H(1) = f(1) - 1 < 0$

H(x) alcanza en los extremos del intervalo valores de signo opuesto.

Conclusión: Siendo H(x) continua en el intervalo [0, 1], y alcanzando valores de signo contrario en los extremos del intervalo, el teorema de Bolzano asegura la existencia de al menos un punto interior del intervalo donde se anula la función.

$$\exists\, c \in (0, 1) / H(c) = 0$$

Teniendo en cuenta la expresión de la función:

$$H(c) = f(c) - x = 0 \Rightarrow f(c) = c$$

8. Demostrar que ∃ algún valor de x que verifica: $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 \mathrm{sen}^2 x} = 119$

Solución.

Para demostrar que una ecuación tiene solución real se puede transformar la ecuación en función y demostrar que cumple las condiciones del teorema de Bolzano.

Sea $f(x) = x^{179} - 119 + \dfrac{163}{1 + x^2 \mathrm{sen}^2 x}$, función que se puede descomponer en suma de:

$$g(x) = x^{179} - 119 \quad \text{y} \quad h(x) = \frac{163}{1 + x^2 \mathrm{sen}^2 x}$$

g(x) es continua por tratarse de una función polinómica.

h(x) es continua por tratarse de un cociente de funciones continuas en el que nunca se anula el denominador ($1 + x^2 \operatorname{sen}^2 x > 0\ \forall\ x \in R$).

f(x) es continua por ser suma de dos funciones continuas.

- $$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\left(-\frac{\pi}{2}\right)^{179}-119+\frac{163}{1+\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2\operatorname{sen}^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=-1{,}27\times10^{35}<0$$
- $$f(0)=(0)^{179}-119+\frac{163}{1+(0)^2\operatorname{sen}^2(0)}=44>0$$

Según el teorema de Bolzano, si una función es continua en un intervalo cerrado y alcanza valores de signo contrario en los extremos del intervalo, en al menos un pinto interior del intervalo se anula la función.

$$\exists\, c\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)/\ f(c)=0:\ f(c)=c^{179}-119+\frac{163}{1+c^2\operatorname{sen}^2 c}=0\Rightarrow c^{179}+\frac{163}{1+c^2\operatorname{sen}^2 c}=119$$

9. Se considera la ecuación $x^3+\lambda x^2-2x=1$. Utilizando el Teorema de Bolzano de los valores intermedios:

a) Probar que si $\lambda > 2$, la ecuación admite alguna solución menor que 1.

b) Probar que si $\lambda < 2$, la ecuación admite alguna solución mayor que 1.

Solución.

Se define la función $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 2x - 1$, continua en todo R por ser polinómica.

$$f(1) = 1^3 + \lambda\cdot 1^2 - 2\cdot 1 - 1 = \lambda - 2$$

Si $\lambda > 2 \Rightarrow \lambda - 2 > 0$ y como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, la función es continua y cambia de signo, por tanto, debe existir un valor $c \in (-\infty, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

Si $\lambda < 2 \Rightarrow \lambda - 2 < 0$ y como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, la función es continua y cambia de signo, por tanto, debe existir un valor $c \in (2, \infty)$ tal que $f(c) = 0$.

10. Sea $f(x) = x^7 - 3x^6 + 2\cdot\operatorname{sen}(x\cdot\pi/2)$. ¿Es cierto que la función f se anula en algún punto x comprendido entre 3 y 4? Enunciar el resultado teórico en el que se basa la respuesta.

Solución.

f(x) es una función continua por ser suma de funciones continuas.

$$\left.\begin{array}{r} g(x)=x^7-3x^6:\text{Polinómica}\Rightarrow\text{Continua}\\ h(x)=2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x:\text{Trigonométrica}\Rightarrow\text{Continua}\end{array}\right\}:f(x)=g(x)+h(x):\text{Continua}$$

$$f(3)=3^7-3\cdot3^6+2\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}=-2<0$$

$$f(4)=4^7-3\cdot4^6+2\cdot\operatorname{sen}\frac{4\pi}{2}=4096>0$$

La función f(x) cumple las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo [3, 4], por lo tanto existe un valor $c \in (3, 4)$ tal que $f(c) = 0$.