DERIVABILIDAD..

1.. Definir función continua en un punto a. Definir función derivable en un punto a. Si es posible poner un ejemplo de una función que en x = a sea:

a) Continua y derivable.
b) Derivable y no continua.
c) Continua y no derivable.

Solución.

Una fundación $y = f(x)$ es continua en $x = a$ cuando

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Intuitivamente: cuando no presenta saltos en ese punto.

Una función $y = f(x)$ es derivable en $x = a$ cuando existe el siguiente límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a este límite se le llama derivada de f en a y se designa por $f'(a)$. Intuitivamente, $y = f(x)$ es derivable en "a" cuando es continua y no tiene un punto anguloso en "a"

Toda función derivable en un punto, es continua en ese punto.

EJEMPLOS

a) Continua y derivable.

Solución.

Cualquier función polinómica, por ejemplo $f(x) = ax^2 + bx + c$

b) Derivable y no continua.

Solución.

Imposible: si no es continua no puede ser derivable.

c) Continua y no derivable.

Solución.

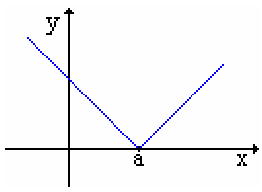
Será una función continua con punto anguloso en a, como por ejemplo las funciones mediante valores absolutos.

$$f(x) = |x - a| = \begin{cases} a - x & \text{si } x < a \\ x - a & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Continua: $f(a) = 0 = \underset{x \to a^-}{\text{Lím}} (a - x) = \underset{x \to a^+}{\text{Lím}} (x - a)$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

No derivable: $f'(a^-) = -1 \neq f'(a^+) = 1$. En x = a la función presenta un punto anguloso



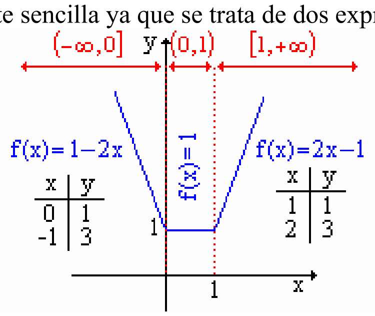
2. Representa gráficamente la función $y = |x| + |x-1|$. Razona en que puntos dicha función no es diferenciable.

Solución.

El primer paso es quitar los valores absolutos transformando la expresión a una función por intervalos, para ello, hay que tener en cuenta que el valor absoluto solo modifica la expresión de la función en los intervalos en los que esta sea negativa, pasandola a positivo multiplicando por -1.

$$f(x) = |x| + |x-1| = \begin{cases} -1\cdot x + (-1)\cdot(x-1) & \text{Si} \quad x \le 0 \\ x + (-1)\cdot(x-1) & \text{Si} \quad 0 < x < -1 \\ x + (x-1) & \text{Si} \quad x \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 1-2x & \text{Si} \quad x \le 0 \\ 1 & \text{Si} \quad 0 < x < -1 \\ 2x-1 & \text{Si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

La representación es bastante sencilla ya que se trata de dos expresiones lineales y otra constante.



La función presenta dos puntos vértices en x = 0 y en x = 1. En estos puntos la función es continua pero no derivable.

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{Si} \quad x \le 0 \\ 1 & \text{Si} \quad 0 < x < 1 \\ 2x-1 & \text{Si} \quad x \ge 1 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{Si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{Si} \quad 0 < x < 1 \\ 2 & \text{Si} \quad x > 1 \end{cases}$$

En x = 0. La función es continua:

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$1 - 2\cdot 0 = \lim_{x\to 0^-} (1-2x) = \lim_{x\to 0^+} 1$$

$$1 = 1 = 1$$

En x = 0 la función es continua. Para que la función fuese derivable en x = 0, se debería cumplir:

$$f'\left(0^-\right) = f'\left(0^+\right)$$

$$f'\left(0^-\right) = -2 \ne f'\left(0^+\right) = 0$$

La función no es derivable en x = 0

En x = 1. La función es continua:

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$1 = \lim_{x\to 1^-} 1 = \lim_{x\to 0^+} (2x-1)$$

$$1 = 1 = 1$$

En x = 1 la función es continua. Para que la función fuese derivable en x = 1, se debería cumplir:

$$f'\left(1^-\right) = f'\left(1^+\right)$$

$$f'\left(1^-\right) = 0 \ne f'\left(1^+\right) = 2$$

La función no es derivable en x = 1

3. Sea la función f(x) = x · |x – 1| Se pide:

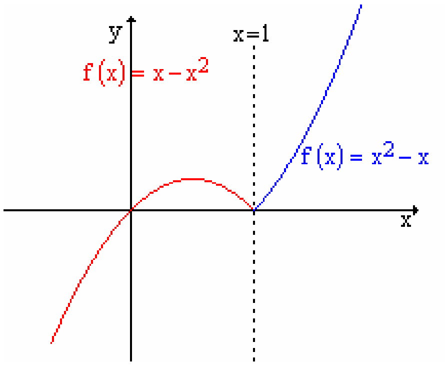
a) Hacer un dibujo aproximado de la gráfica de la función.

b) Estudiar la derivabilidad de la función en x = 1.

Solución.

a. El primer paso es expresar la función sin valor absoluto. Sí x < 1, x – 1 < 0, y el valor absoluto lo transforma en –(x – 1) = 1 – x.

$$f(x)=x\cdot|x-1|=\begin{cases}x\cdot(1-x) & \text{Si } x<1\\ x\cdot(x-1) & \text{Si } x\ge 1\end{cases}=\begin{cases}x-x^2 & \text{Si } x<1\\ x^2-x & \text{Si } x\ge 1\end{cases}$$



Por poder dibujar la función con un solo trazo, la función es continua en R.

b. La condición para que una función sea derivable en un punto a, es que en ese punto exista el siguiente límite:

$$\operatorname*{Lím}_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Para que exista este límite, deben de existir los límites laterales y ser iguales:

$$\operatorname*{Lím}_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\operatorname*{Lím}_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Estos límites corresponden a las derivadas laterales, por lo tanto, la condición para que una función sea derivable en un punto es que en ese punto las derivadas laterales sean iguales.

$$f'(a^-)=f'(a^+)$$

Sea $f(x)=\begin{cases}x-x^2 & \text{Si } x<1\\ x^2-x & \text{Si } x\ge 1\end{cases}$ y $f'(x)=\begin{cases}1-2x & \text{Si } x<1\\ 2x-1 & \text{Si } x>1\end{cases}$:

$$f'(1^-)=1-2\cdot 1=-1\ne f'(1^+)=2\cdot 1-1=1$$

La función no es derivable en x = 1.

4. Estudiar la derivabilidad en x = 0 de $f(x)=|x^3|$

Solución.

$$f(x)=|x^3|=\begin{cases}-x^3 & \text{Si } x<0\\ x^3 & \text{Si } x\ge 0\end{cases}$$

Para que la función sea derivable en x = 0, se debe cumplir:

$$f'(0^-)=f'(0^+)$$

$$f'(x)=\begin{cases}-3x^2 & \text{Si} \quad x<0\\ 3x^2 & \text{Si} \quad x>0\end{cases}$$

$$f'\left(0^-\right)=-3\cdot 0^2=0=f'\left(0^+\right)=3\cdot 0^2=0$$

La función es derivable en x = 0.

5.

a) Defina derivada de una función f en el punto a.

b) Aplicando la definición de derivada, demostrar que si f es derivable y periódica, de periodo T, entonces su derivada f ' también es periódica de periodo T.

Solución.

a. La derivada de una función en un punto es un número Real que representa la pendiente de la recta tangente a la función en el punto.

$$f'(a)=\underset{h\to 0}{\text{Lím}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

b. En una función periódica se cumple:

$$f(a+T)=f(a)$$

Se pide demostrar que $f'(a+T)=f'(a)$

$$f'(a+T)=\underset{h\to 0}{\text{Lím}}\frac{f(a+T+h)-f(a+T)}{h}=\begin{Bmatrix}f(a+T+h)=f(a+h)\\ f(a+T)=f(a)\end{Bmatrix}=\underset{h\to 0}{\text{Lím}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(x)$$

6. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}e^{-x}-1 & \text{Sí} \quad x\le 0\\ x^2+x & \text{Sí} \quad x>0\end{cases}$

contestar razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Es continua en el punto x = 0?.

b) ¿Es derivable en el punto x = 0?.

c) ¿Alcanza algún extremo?.

Solución.

a. Para que la función sea continua en x = 0 se debe cumplir:

$$f(0)=\underset{x\to 0^-}{\text{Lím}}\ f(x)=\underset{x\to 0^+}{\text{Lím}}\ f(x)$$

$$e^{-0}-1=\underset{x\to 0^-}{\text{Lím}}\left(e^{-x}-1\right)=\underset{x\to 0^+}{\text{Lím}}\left(x^2+x\right)$$

$$1-1=e^{-0}-1=0^2+0$$

$$0=0=0$$

La función es continua en x = 0.

b. Para que la función sea derivable en x = 0 se debe cumplir:

$$f'\left(0^-\right)=f'\left(0^+\right)$$

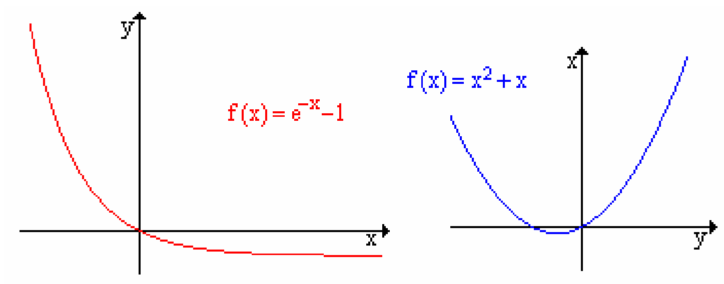
$$f'(x)=\begin{cases}-e^{-x} & \text{Sí} \quad x<0\\ 2x+1 & \text{Sí} \quad x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'(0^-)=-e^{-0}=-1\\ f'(0^+)=2\cdot 0+1=1\end{cases}: f'(0^-)\ne f'(0^+)$$

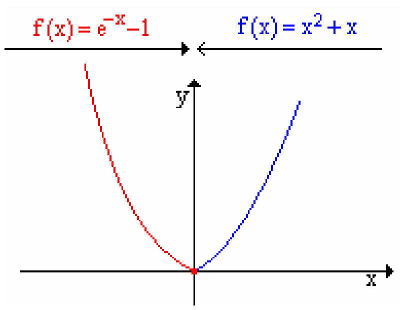
La función no es derivable en x = 0.

c. Para que una función tenga un extremo absoluto o relativo en un punto basta con que en ese punto esté definida, no es necesario que sea derivable, pero deberá cumplir una de las siguientes condiciones:

- Máximo: Para todo x perteneciente al entorno de centro a, $f(x) \leq f(a)$.
- Mínimo: Para todo x perteneciente al entorno de centro a, $f(x) \geq f(a)$.

Para saber si la función alcanza algún extremo basta con dibujar su gráfica.





Como puede observarse en la gráfica, en x = 0 la función alcanza un mínimo absoluto ya que cumple las condiciones descritas.

1. $f(0) = 0$
2. Para cualquier valor del entorno de $x = 0$, $f(x) \geq f(0)$.

7. Dada la función $\begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Razonar las siguientes preguntas.

a) Es continua en x = 0.

Solución.

Se pide demostrar que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} \underset{L'H}{\overset{(0/0)}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{(x)'}{(e^x - 1)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^0} = \frac{1}{1} = 1$$

f(x) es continua en x = 0.

b) Es derivable en x = 0.

Solución.

Se pide comprobar si existe el $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. En el caso de existir, el valor corresponderá a f '(0).

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - e^x + 1}{xe^x - x} \underset{L'H}{\overset{(0/0)}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{1 \cdot e^x + x \cdot e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{e^x + xe^x - 1} \underset{L'H}{\overset{(0/0)}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{e^x + 1 \cdot e^x + x \cdot e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2e^x + xe^x} = \frac{-e^0}{2e^0 + 0 \cdot e^0} = -\frac{1}{2} = f'(0)$$

c) Es continua la función f '(x) en x = 0.

Solución.

Se pide demostrar sí el límite de la derivada de f (x) cuando x tiende a cero, es igual al valor de la derivada en cero:

$$\lim_{x\to 0} D\left(\frac{x}{e^x-1}\right)=f'(0)$$

siendo f '(0) el valor obtenido en el apartado anterior y $D\left(\frac{x}{e^x-1}\right)$ la derivada de la función.

$$D\left(\frac{x}{e^x-1}\right)=\frac{1\cdot\left(e^x-1\right)-x\cdot e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{e^x-x\cdot e^x-1}{\left(e^x-1\right)^2}$$

calculando el límite de está expresión cuando x tiende a cero, se comprueba que coincide con el valor de f'(0).

$$\lim_{x\to 0} D\left(\frac{x}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-xe^x-1}{\left(e^x-1\right)^2}\underset{L'H}{\overset{\left(0/0\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\left(1\cdot e^x+x\cdot e^x\right)}{2\cdot\left(e^x-1\right)\cdot e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{-xe^x}{2\cdot\left(e^x-1\right)\cdot e^x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2\cdot\left(e^x-1\right)}\underset{L'H}{\overset{\left(0/0\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2\cdot e^x}=\frac{-1}{2\cdot e^0}=-\frac{1}{2}$$

La derivada también es continua en x = 0

8. Sea $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x\le 0\\ x^2+ax+b & \text{si } x>0\end{cases}$. Siendo a y b nº reales, hallarlos para que f(x) sea continua y derivable en el punto x = 0. Para esos valores de a y b, analizar si f(x) tiene inflexión en el punto x = 0.

Solución.

Para que la función sea continua en x = 0 debe cumplir:

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$$

Por la definición de la función, f (0) = sen 0 = 0

Para que exista el límite, deben de existir los límites laterales y ser iguales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Sustituyendo por las expresiones correspondientes a cada intervalo, y resolviendo los límites, se obtiene una relación entre los parámetros.

$$\lim_{x\to 0^-}\operatorname{sen} x=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2+ax+b\right) \qquad \operatorname{sen} 0=0^2+a\cdot 0+b$$

$$b=0$$

El parámetro a se calcula con la condición de que la función sea también derivable en el punto cero. Para que una función sea derivable en un punto, las derivadas laterales de la función en el punto deben coincidir.

$$f'\left(0^-\right)=f'\left(0^+\right)$$

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x & \text{Si} & x<0\\ 2x+a & \text{Si} & x>0\end{cases}$$

$$f'\left(0^-\right)=\cos 0=1 \qquad f'\left(0^+\right)=2\cdot 0+a=a$$

Igualando

$$a=1$$

La expresión de la función continua y derivable es

$$f(x)=\begin{cases}\text{sen } x & \text{si } x\le 0\\ x^2+x & \text{si } x>0\end{cases}$$

La condición necesaria, no suficiente, para que una función tenga un punto de inflexión, es que en ese punto la segunda derivada sea nula. Para que la segunda derivada sea nula en un punto, la derivada de la función debe ser derivable, y por lo tanto:

$$\left(f'\left(0^-\right)\right)' = \left(f'\left(0^+\right)\right)' \qquad f''\left(0^-\right)=f''\left(0^+\right)$$

$$f''(x)=\begin{cases}-\text{sen } x & \text{Si} & x<0\\ 2 & \text{Si} & x>0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} f''\left(0^-\right)=\text{sen } 0=0\\ f''\left(0^+\right)=2\end{array}\right\} : f''\left(0^-\right)\neq f''\left(0^+\right)$$

En cero no existe punto de inflexión por no existir segunda derivada.

9. Hallar a y b para que la función $f(x)=\begin{cases}x^3+1 & \text{Si} & x\ge 0\\ ax+b & \text{Sí} & x<0\end{cases}$ sea continua y derivable en x = 0.

Solución.

Para que la función sea continua en x = 0 debe cumplir:

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$$

Por la definición de la función, $f(0)=0^3+1=1$

Para que exista el límite, deben de existir los límites laterales y ser iguales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Sustituyendo por las expresiones correspondientes a cada intervalo, y resolviendo los límites, se obtiene una relación entre los parámetros.

$$\lim_{x\to 0^-}(ax+b)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^3+1\right) \ : \quad a\cdot 0+b=0^3+1 \ : \quad b=1$$

Para que la función sea derivable en x = 0, se debe cumplir:

$$f'\left(0^-\right)=f'\left(0^+\right)$$

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{Si} & x>0\\ a & \text{Sí} & x<0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} f'\left(0^-\right)=a\\ f'\left(0^+\right)=3\cdot 0^2\end{array}\right\} : f'(0^-)=f'(0^+) \ : \quad a=0$$

Para que la función sea continua y derivable debe ser: $f(x)=\begin{cases}x^3+1 & \text{Si} & x\ge 0\\ 1 & \text{Sí} & x<0\end{cases}$

10. Demostrar que la función $f(x)=\begin{cases}0 & \text{Sí} \quad x=0\\ e^{-1/x^2} & \text{Sí} \quad x\neq 0\end{cases}$ es derivable y que su función derivada f ' es continua.

Solución.

Se pide comprobar si existe el $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$. En el caso de existir, el valor corresponderá a f ‘(0).

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{e^{1/x^2}}\underset{L'H}{\overset{(0/0)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{-1/x^2}{e^{1/x^2}\cdot\left(-2/x^3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2e^{1/x^2}}=\frac{0}{\infty}=0$$

Se pide demostrar sí el límite de la derivada de f (x) cuando x tiende a cero, es igual al valor de la derivada en cero:

$$\text{Lím}_{x\to 0} D\left(e^{-1/x^2}\right)=f'(0)$$

siendo f ‘(0) el valor obtenido en el apartado anterior y $D\left(e^{-1/x^2}\right)$ la derivada de la función.

$$D\left(e^{-1/x^2}\right)=e^{-1/x^2}\cdot\left(-2/x^3\right)=-\frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}$$

calculando el límite de está expresión cuando x tiende a cero, se comprueba que coincide con el valor de f’(0).

$$\text{Lím}_{x\to 0} D\left(e^{-1/x^2}\right)=\text{Lím}_{x\to 0}-\frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}=\text{Lím}_{x\to 0}-\frac{2/x^3}{e^{1/x^2}}\underset{L'H}{\overset{(0/0)}{=}}\text{Lím}_{x\to 0}-\frac{-6/x^4}{e^{1/x^2}\cdot\left(-2/x^3\right)}=\text{Lím}_{x\to 0}-\frac{3/x}{e^{1/x^2}}\underset{L'H}{\overset{(0/0)}{=}}$$

$$=\text{Lím}_{x\to 0}-\frac{-3/x^2}{e^{1/x^2}\cdot\left(-2/x^3\right)}\underset{L'H}{\overset{(0/0)}{=}}\text{Lím}_{x\to 0}\frac{3x}{2e^{1/x^2}}=\frac{3\cdot 0}{2\cdot\infty}=0$$

La derivada también es continua en x = 0

11. Sea $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x-1} & \text{Sí} \quad x\le 0\\ \dfrac{ax+b}{x^2+2x+1} & \text{Sí} \quad x>0\end{cases}$

Hallar a y b para que f sea continua en x = 0 y su primera derivada se anule en x = 2.

Solución.

Para que la función sea continua en x = 0 debe cumplir:

$$f(0)=\text{Lím}_{x\to 0} f(x)$$

Para que exista el límite, deben de existir los límites laterales y ser iguales:

$$\text{Lím}_{x\to 0^-} f(x)=\text{Lím}_{x\to 0^+} f(x)$$

Por lo tanto se puede concluir que para que la función sea continua en x = 0, se debe cumplir:

$$f(0)=\text{Lím}_{x\to 0^-} f(x)=\text{Lím}_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\frac{0^2+1}{0-1}=\text{Lím}_{x\to 0^-}\frac{x^2+1}{x-1}=\text{Lím}_{x\to 0^+}\frac{ax+b}{x^2+2x+1}$$

Resolviendo los límites e igualando, se obtiene el valor de b.

$$\frac{0^2+1}{0-1}=\frac{a\cdot 0+b}{0^2+2\cdot 0+1} \quad : \quad 1=b$$

El parámetro a se obtiene con la condición $f'(2)=0$

$$f'(x)=\begin{cases} D\left[\dfrac{x^2+1}{x-1}\right] & \text{Sí } \ x<0 \\ D\left[\dfrac{ax+1}{x^2+2x+1}\right] & \text{Sí } \ x>0 \end{cases}$$

- $D\left[\dfrac{x^2+1}{x-1}\right]=\dfrac{2x\cdot(x-1)-(x^2+1)\cdot 1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$
- $D\left[\dfrac{ax+1}{x^2+2x+1}\right]=D\left[\dfrac{ax+1}{(x+1)^2}\right]=\dfrac{a\cdot(x+1)^2-(ax+1)\cdot 2(x+1)\cdot 1}{(x+1)^4}=\dfrac{-ax+a-2}{(x+1)^3}$

Sustituyendo en la expresión de la derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} & \text{Sí } \ x<0 \\ \dfrac{-ax+a-2}{(x+1)^3} & \text{Sí } \ x>0 \end{cases}$$

Se particulariza para dos y se iguala a cero.

$$f'(2)=\frac{-2a+a-2}{(x+1)^3}=\frac{-a-2}{(x+1)^3}=0\Rightarrow -a-2=0 : a=-2$$

La función queda: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & \text{Sí } \ x\le 0 \\ \dfrac{-2x+1}{x^2+2x+1} & \text{Sí } \ x>0 \end{cases}$

12.

a) Enunciar la regla de derivación de la composición de funciones.

Solución.

Regla de la cadena:

$$\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

b) Sea $f:\Re-\{0\}\rightarrow\Re$ derivable tal que $f'(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ para todo x distinto de 0. Demostrar:

1. Que f es derivable dos veces.

Solución.

Se pide demostrar que existe la segunda derivada de la función f, para ello habrá que intentar expresarla en términos de f.

Teniendo en cuenta que:

$$f''(x)=D(f'(x))=\left\{f'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=D\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

aplicando la regla de la cadena para derivar esta expresión:

$$f''(x)=D\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

para encontrar la expresión de $f'\left(\frac{1}{x}\right)$ se tiene en cuenta la definición que se da para $f'(x)$.

Si $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{1/x}\right) = f(x)$, sustituyendo en la expresión de la segunda derivada, se obtiene lo que se busca.

$$f''(x) = f(x)\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

2. Que existen nº reales tales que: $ax^2\cdot f''(x) + bx\cdot f'(x) + c\cdot f(x) = 0$ y $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

Solución.

Se pide demostrar que f'', f' y f son linealmente dependientes. Para ello partiendo de la expresión de f'' se demuestra lo que se pide

$$f''(x) = f(x)\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right) \qquad f''(x) = -\frac{f(x)}{x^2} \qquad x^2\cdot f''(x) = -f(x) \qquad x^2\cdot f''(x) + f(x) = 0$$

que a su vez se puede poner de esta forma:

$$1\cdot x^2 f''(x) + 0\cdot x\, f'(x) + 1\cdot f(x) = 0$$

que es la relación pedida, con a = 1, b = 0, c = 1

13. Sean u (x) y v (x) dos funciones derivables en un punto x. Pruébese que su producto u(x)·v(x) es derivable obteniendo la expresión de su derivada:

$$D[u(x)\cdot v(x)] = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Solución.

Teniendo en cuenta la definición de derivada de una función:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

se aplica al producto $u(x)\cdot v(x)$

$$(u(x)\cdot v(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)\cdot v(x+h) - u(x)\cdot v(x)}{h}$$

para simplificar esta expresión se suma y se resta al numerador $u(x)\cdot v(x+h)$, obteniendo:

$$(u(x)\cdot v(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)\cdot v(x+h) - \overbrace{u(x)\cdot v(x+h)}^{-} + \overbrace{u(x)\cdot v(x+h)}^{+} - u(x)\cdot v(x)}{h}$$

si de los dos primero término del numerador se saca factor común de $v(x+h)$, y de los dos últimos se saca factor común de $u(x)$, queda:

$$(u(x)\cdot v(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h) - u(x)]\cdot v(x+h) + u(x)\cdot[v(x+h) - v(x)]}{h}$$

expresión que se puede descomponer en

$$(u(x)\cdot v(x))' = \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\cdot v(x+h) + u(x)\cdot\frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right]$$

aplicando la regla del límite de la suma es la suma de los límites

$$(u(x)\cdot v(x))' = \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\cdot v(x+h)\right) + \lim_{h\to 0}\left(u(x)\cdot\frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right)$$

haciendo lo mismo con la regla del producto “El límite del producto es el producto de los límites

$$(u(x)\cdot v(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} v(x+h) + \lim_{h\to 0} u(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

y teniendo en cuenta que: $\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} = u'(x) \\ \lim\limits_{h\to 0} v(x+h) = v(x+0) = v(x) \\ \lim\limits_{h\to 0} u(x) = u(x) \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v(x+h)-v(x)}{h} = v'(x) \end{cases}$ y sustituyendo en la expresión:

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

14. Sea la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & \text{Sí} \quad x \le 1 \\ x^2 & \text{Sí} \quad x > 1 \end{cases}$

a) (0'5 puntos) Razonar si la función es continua en toda la recta real.
b) (0,5 puntos) Razonar si f es derivable en toda la recta real.

Solución.

a. Función por intervalos definida mediante expresiones polinómicas. El único punto donde puede presentar problemas de continuidad es en x = 1(punto frontera).

Para estudiar la continuidad en x = 1, se debe comprobar si: $f(1) = \text{Lím}_{x\to 1} f(x)$

$$f(1) = \text{Lím}_{x\to 1^-} f(x) = \text{Lím}_{x\to 1^+} f(x)$$
$$(2-1)^3 = \text{Lím}_{x\to 1^-} (2-x)^3 = \text{Lím}_{x\to 1^+} x^2$$
$$1^3 = (2-1)^3 = 1^2$$
$$1 = 1 = 1$$

Continua en x = 1.

b. Por ser una función definida por expresiones polinómicas, el único punto donde la función puede presentar problemas de derivabilidad es en x = 1(punto frontera).

Para que la función sea derivable en x = 1 se debería cumplir: $f'(1^-) = f'(1^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} D\left[(2-x)^3\right] & \text{Sí} \quad x < 1 \\ D\left[x^2\right] & \text{Sí} \quad x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 3(2-x)^2\cdot(-1) & \text{Sí} \quad x < 1 \\ 2x & \text{Sí} \quad x > 1 \end{cases} = \begin{cases} -3(2-x)^2 & \text{Sí} \quad x < 1 \\ 2x & \text{Sí} \quad x > 1 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -3(2-1)^2 = -3 \\ f'(1^+) = 2\cdot 1 = 2 \end{array}\right\} : f'(1^-) \ne f'(1^+)$ En x = 1 la función no es derivable.

15. Representar la función $y = |x^2 - 7x + 10|$ e indicar en que puntos no es derivable.

Solución.

Para representar una función en valor absoluto, se representa sin el valor absoluto y a continuación, se gira en torno al eje OX los tramos de curva que estén por debajo de él.

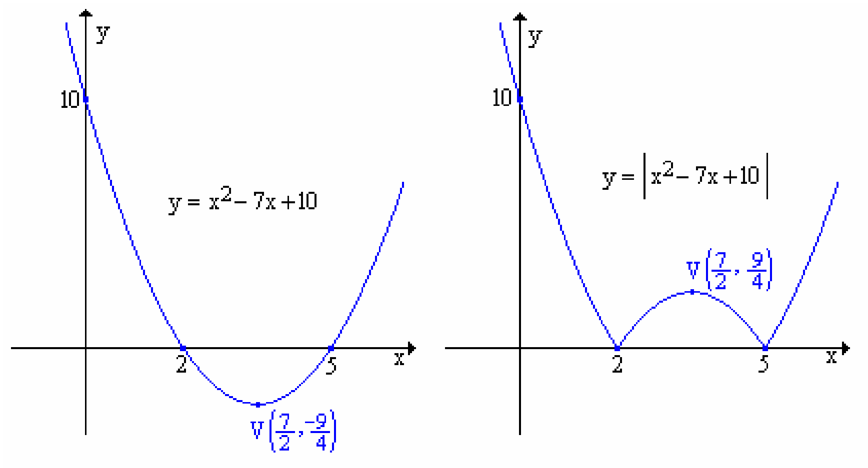
Para hacer la gráfica de un polinomio de 2º grado se calcula el vértice y los puntos de corte con los ejes.

$$y = x^2 - 7x + 10$$

- Vértice: $\begin{cases} x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-7}{2\cdot 1} = \dfrac{7}{2} \\ y_v = f(x_v) = \left(\dfrac{7}{2}\right)^2 - 7\dfrac{7}{2} + 10 = -\dfrac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow V = \left(\dfrac{7}{2}, -\dfrac{9}{4}\right)$

- Cortes con OX(y = 0). $x^2 - 7x + 10 = 0 : \begin{cases} x = 2 : (2, 0) \\ x = 5 : (5, 0) \end{cases}$

- Corte con OY(x = 0). $y = 0^2 - 7\cdot 0 + 10 = 10 : (0, 10)$



Expresión de la función: En el intervalo donde la función es negativa, el valor absoluto multiplica la expresión por −1 para cambiar el signo y dejarla en positivo.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 7x + 10 & \text{Si} \quad x \le 2 \\ -(x^2 - 7x + 10) & \text{Si} \quad 2 < x < 5 \\ x^2 - 7x + 10 & \text{Si} \quad x \ge 5 \end{cases}$$

En x = 2 y en x = 5 la función presenta puntos vértice o angulosos, es decir, puntos donde la función es continua pero no derivable.

En x = 2:

$$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

$$2^2 - 7\cdot 2 + 10 = \lim_{x\to 2^-}\left(x^2 - 7x + 10\right) = \lim_{x\to 2^+}\left(-x^2 + 7x - 10\right)$$

$$0 = 0 = 0$$

En x = 2 la función es continua.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-7 & \text{Si} \quad x<2 \\ -2x+7 & \text{Si} \quad 2<x<5 \\ 2x-7 & \text{Si} \quad x>5 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=2\cdot 2-7=-3 \\ f'(2^+)=-2\cdot 2+7=+3 \end{array}\right\} : f'(2^-)\neq f'(2^+) \text{ En } x=2 \text{ la función no es derivable}$$

En x = 5 igual, continua pero no derivable.

16. Sea $f(x)=\begin{cases} 3x & \text{Si} \quad x\le 1 \\ ax^2+b\cdot(x-1) & \text{Si} \quad x>1 \end{cases}$

¿Para que valores de a y b es continua la función f(x)? ¿Para que valores de a y b derivable?

Solución.

Función por intervalos definida mediante expresiones polinómicas. El único punto donde puede presentar problemas de continuidad es en x = 1(punto frontera).

Para estudiar la continuidad en x = 1, se debe comprobar si: $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$3\cdot 1=\lim_{x\to 1^-} 3x=\lim_{x\to 1^+}\left(ax^2+b(x-1)\right)$$

$$3\cdot 1=a\cdot 1^2+b(1-1)$$

$$a=1.$$

Para a = 1 y cualquier valor que tome b, la función es continua.

Para que sea derivable, la función debe ser continua y además, $f'(1^-)=f(1^+)$.

$$f(x)=\begin{cases} 3x & \text{Si} \quad x\le 1 \\ x^2+b\cdot(x-1) & \text{Si} \quad x>1 \end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases} 3 & \text{Si} \quad x<1 \\ 2x+b & \text{Si} \quad x>1 \end{cases}$$

$$f'(1^-)=f(1^+)$$

$$3=2\cdot 1+b : b=1$$

Para que la función sea continua y derivable en todo R, sus expresión debe ser:

$$f(x)=\begin{cases} 3x & \text{Si} \quad x\le 1 \\ x^2+(x-1) & \text{Si} \quad x>1 \end{cases}$$

17. Demostrar, aplicando la definición de derivada y el hecho de que sen h→h sí h→0, que (sen x)' = cos x.

Solución.

$$f(x)=\text{sen } x$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen } x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen } x\cdot\cos h+\cos x\cdot\text{sen } h-\text{sen } x}{h}=$$

$$\text{Si } h\to 0 : \begin{cases} \text{sen } h\to k \\ \cos h\to 1 \end{cases}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen } x\cdot 1+\cos x\cdot h-\text{sen } x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cdot h}{h}=\lim_{h\to 0}\cos x=\cos x$$