TEOREMAS DE ROLLE Y VALOR MEDIO. FORMULA DE TAYLOR

1. Mediante un desarrollo de Taylor de tercer grado para la función f(x)=arctg x, calcular el valor aproximado de arctg(0'1), y acotar el error cometido.

2. Sea la función $f(x) = 4 + \sqrt[4]{x^8}$ en el intervalo [–1,1]. Comprobar si es aplicable el teorema de Rolle a f(x) en dicho intervalo.

3. Calcular a, b y c para que la función f(x)= $\begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x < 3 \\ bx + c & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ cumpla la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0,8]. Representar la función y hallar el valor para que el se cumple dicho teorema.

4. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 - 1}$. Estudiar si se puede aplicar, o no, el teorema de Rolle en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. En caso afirmativo calcular el valor c perteneciente al intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a que se refiere el teorema indicado.

5. Demostrar que la ecuación $x^5 + x - 1$ tiene exactamente una raíz real entre 0 y 1.

6. Demostrar que la función $e^x - x - 3$ posee un cero en el eje real positivo. Investigar si es el único.

7. Demostrar que cualquiera que sea el valor de m, la ecuación $2x^5 + x + m = 0$ no tiene nunca dos soluciones reales.

8. ¿En qué puntos es creciente la función $f\colon R \to R : f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

9. ¿Es aplicable el teorema de Rolle a la función f: [1, 5]→R?. definida por f(x)= $\begin{cases} x + 2 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 7 - x & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$

10. Dada la función $f(x) = x^3 - 18x$ definida en el intervalo $\left[0, 3\sqrt{2}\right]$, comprobar que verifica la hipótesis del teorema de Rolle y encontrar su valor de a en [0, 3√2] tal que f(a)=0.

11. Aplicar el teorema de Rolle a las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + x - 2$ en [–2,1]
b) $y = -x^2 + 5x - 1$ en [1,4]
a) $y = |x|$ en $-1 \leq x \leq 1$
b) $y = e^x$ en [0,1]
c) $y = (2 - x)\cdot(x + 3)$ en [–3,2]
d) $y = x^2$ en [0,5] y en [–1,1]
e) $f(x) = x^3 - 12x$ en $\left[0'2, \sqrt{3}\right]$

12. Aplicar el teorema de los incrementos finitos a las siguientes funciones:

a) y = Lx, definida en [e, e^2]
b) $y = x^2 + 1$ en [0,2]
c) $y = x^2$ en [0,5]
d) $y = \log_3(2x+1)$ en [1 , 4]

13. Aplicar el teorema de Cauchy y hallar el punto m para las funciones:

a) y = x ; y = Lx en [1,e]
b) y = x+1 ; $y = x^2+3$ en [0,2]
c) $y = x^2$; y Lx en [1,e]
d) y = x ; y = 1/x en [–1,1]

14. Si $f(x) = 2 + x^3(x-2)^2$ probar que la ecuación $f'(x)=0$ posee al menos una raíz en el intervalo (0,2) sin calcular la derivada

15. Dada la parábola de ecuación $y=x^2-3x+2$ se considera la recta r que une los puntos de esa parábola de abscisas $x_1=1$, $x_2=3$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a la recta r.

16. **Calificación máxima: 2 puntos** Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + nx & \text{Sí } x < -2 \\ x^2 + m & \text{Sí } x \geq -2 \end{cases}$

a) **(1 punto)** Determinar m y n para que se cumplan las hipótesis del teorema de valor medio en el intervalo $(-4, 2)$.

b) **(1 punto)** Hallar los puntos del intervalo cuya existencia garantiza dicho teorema.

17. Sea f la función definida del modo siguiente $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{Sí } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{Sí } x > 0 \end{cases}$. Hallar los valores de a y b para que f(x) sea derivable en R. Con los valores obtenidos hallar los puntos de la curva y=f(x) en los que la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos A(−3 , f(−3)) y B(2 , f(2)).

18. Comprobar que la ecuación $x^7 + 3x + 3 = 0$ tiene una única solución real.

19. Determinar un punto sobre la parábola $y=x^2$ comprendido entre los puntos A(1,1), B(3,9) en el que la tangente a la parábola sea paralela a la recta AB.

20. Sea la función definida sobre el intervalo [0 , 1] de la forma $f(x) = \begin{cases} -2x + 1; & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x + 1; & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$. ¿Se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle? Razonar la respuesta.

21. ¿Se verifican las hipótesis del Teorema de Rolle para la función $f(x)=|2x-3|-7$, $-2 \leq x \leq 5$?

22. Sea $F(x) = 3 + x^5 \cdot (x - 3)^4$. Probar que la función derivada $f'(x)$ posee al menos una raíz en el intervalo abierto (0 , 3).

23. Sea "f" una función continua y derivable tal que f(0)=3 Calcular cuánto tiene que valer f(5) para asegurar que en [0,5], existe un c tal que f '(c)=8.

24. Sea $f(x) = \begin{cases} -x \cdot (x - 2) & \text{sí } 0 \leq x < 1 \\ 3 \cdot (x - 1)^3 & \text{sí } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Demostrar que a la función f se le puede aplicar el teorema del valor medio en el intervalo [0,2]. Calcular el ó los valores intermedios vaticinados por el teorema.