SOLUCIONES DE LIMITES

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{Ln^3x + 2x}$

SOLUCIÓN: Sustituyendo x por ∞ obtenemos:

$$\frac{\infty}{Ln^3\infty + 2\infty} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{INDETERMINADO}$$

Como se trata de una indeterminación de tipo L´Hopital, aplicamos dicha regla:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{Ln^3x + 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{3Ln^2x}{x} + 2} = \frac{1}{\frac{\infty}{\infty} + 2}$$

Resolvemos aparte el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3Ln^2x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{INDETERMINACIÓN de tipo L´Hopital otra vez:}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3Ln^2x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6Lnx\cdot\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{6Lnx}{x} = (\text{L´Hopital}) = \lim_{x\to\infty} \frac{6\cdot\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Así, el límite original resulta:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{Ln^3x + 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{3Ln^2x}{x} + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+\text{tg } x}{1+\text{sen } x}\right)^{\frac{1}{\text{sen } x}}$

SOLUCIÓN: Sustituyendo x por su valor obtenemos:

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+\text{tg } x}{1+\text{sen } x}\right)^{\frac{1}{\text{sen } x}} = \left(\dfrac{1+0}{1+0}\right)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}$ INDETERMINACIÓN QUE SE RESUELVE APLICANDO LA FÓRMULA:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 1^{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)\cdot g(x)}$$

Así,

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\text{tg } x}{1+\text{sen } x}\right)^{\frac{1}{\text{sen } x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\text{tg } x}{1+\text{sen } x}-1\right)\cdot\frac{1}{\text{sen } x}}$$

Hacemos aparte el límite del exponente:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\text{tg } x}{1+\text{sen } x}-1\right)\cdot\frac{1}{\text{sen}x} = (\text{operando}) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\text{tg}x-1-\text{sen}x}{1+\text{sen}x}\right)\cdot\frac{1}{\text{sen}x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{tg}x-\text{sen}x}{1+\text{sen}x}\right)\cdot\frac{1}{\text{sen}x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\text{sen}x}{\cos x}-\text{sen}x}{1+\text{sen}x}\right)\cdot\frac{1}{\text{sen}x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{1+\text{sen}x} = \frac{\frac{1}{1}-1}{1+0} = 0$$

Por tanto, el límite original,

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\text{tg } x}{1+\text{sen } x}\right)^{\frac{1}{\text{sen } x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\text{tg } x}{1+\text{sen } x}-1\right)\cdot\frac{1}{\text{sen } x}} = e^0 = 1$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}$

SOLUCIÓN: Sustituyendo se trata de un límite de la forma:

Por un lado, la base tiende a 1, ya que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)=\dfrac{\infty}{\infty}$ INDETERMINACIÓN

Pero Al tratarse de dos polinomios del mismo grado, el límite es el cociente de sus coeficientes principales, es decir, el cociente de los coeficientes asociados al los términos de mayor grado, que en este caso serían:

$$\frac{2}{2}=1$$

Por otro lado, como el exponente tiende a infinito tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}=1^{\infty}$$ INDETERMINACIÓN que resolveremos como antes:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}-1\right)\cdot x}$$

Resolvemos el límite del exponente aparte:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}-1\right)\cdot x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3-2x+1}{2x-1}\right)\cdot x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{2x-1}\right)\cdot x=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{2x-1}=\frac{4}{2}=2$$

ya que se trata de un límite de la forma: cociente de polinomios, para el que aplicamos la regla de la máxima potencia del denominador, que en este caso coincide con la potencia del numerador, luego el valor del límite es el cociente de los coeficientes principales.

Así, el límite dado es:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x}=e^{2}$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)\right]$

SOLUCIÓN: Sustituyendo obtenemos:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)\right]=\infty(\infty-\infty)$ que es indeterminado. Resolvemos la indeterminación multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de la resta de raíces:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\,\frac{\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\,\frac{(x+a)-x}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=\frac{a}{2}$$

5. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\text{sen }x}-\dfrac{1}{x}\right)$

SOLUCIÓN: Sustituyendo, se tiene:

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\text{sen }x}-\dfrac{1}{x}\right)=\infty-\infty$ Indeterminado. Para resolver dicha indeterminación podemos proceder de dos maneras:

1. Operando la resta de fracciones:

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\text{sen }x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}=\dfrac{0}{0}$ Indeterminación del tipo L´Hopital, que resolvemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\text{L´Hopital}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0 \text{ Luego}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\text{sen } x}-\frac{1}{x}\right)=0$$

2. Utilizando infinitésimos equivalentes: La función seno de x se puede sustituir por x en un entorno del punto 0, es decir, $senx \cong x, \quad x\to 0$

   Así, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\text{sen } x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0} 0=0$

6. $\lim_{x\to 0}\left(\text{cotg } x-\frac{1}{x}\right)$

SOLUCIÓN: Sustituyendo se obtiene:

$\lim_{x\to 0}\left(\text{cotg } x-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty$ Indeterminado. Para resolver la indeterminación, escribimos la cotangente como un cociente y operamos la resta de fracciones:

$$\lim_{x\to 0}\left(\text{cotg } x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\text{senx}}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\text{senx}}{\text{xsenx}}=\frac{0}{0} \text{ Indeterminación de tipo L´Hopital:}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\text{senx}}{\text{xsenx}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\text{xsenx}-\cos x}{\text{senx}+x\cos x}=(\text{operando})=\lim_{x\to 0}\frac{-\text{xsenx}}{\text{senx}+x\cos x}=(\text{L´Hopital})=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\text{senx}-x\cos x}{\cos x+\cos x-\text{xsenx}}=\frac{0}{2}=0$$

Luego

$$\lim_{x\to 0}\left(\text{cotg } x-\frac{1}{x}\right)=0$$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\text{sen } x}-x-1}{2x^2-x^3}$

SOLUCIÓN: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\text{sen } x}-x-1}{2x^2-x^3}=\frac{e^0-0+1}{0}=\frac{0}{0}$ Indeterminación de tipo L´Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\text{sen } x}-x-1}{2x^2-x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\text{senx}}\cos x-1}{4x-3x^3}=\left(\frac{0}{0}\text{L´Hopital}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\text{senx}}\cos^2 x-e^{\text{senx}}\text{senx}}{4-6x}=\frac{1}{4}$$

8. $\lim_{x\to 0} x^{\text{sen } x}$

SOLUCIÓN: $\lim_{x\to 0} x^{\text{sen } x}=0^0$ Indeterminado. Llamemos $L=\lim_{x\to 0} x^{\text{sen } x}$, entonces ç

$\ln L=\lim_{x\to 0}\left(\ln x^{\text{sen } x}\right)=\lim_{x\to 0}(\text{senx}\cdot\ln x)$, ya que, por las propiedades de la función logaritmo neperiano, tenemos: $\ln a^b=b\ln a$

Utilicemos ahora la equivalencia que usamos antes: $x\cong senx, x\to 0$. Así:

$$\ln L=\lim_{x\to 0}(\text{senx}\cdot\ln x)=\lim_{x\to 0} x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\text{L´Hopital}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

Luego el logaritmo neperiano del límite pedido, $\ln L=0$, por tanto,

$$L = \lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x} = 1$$

9. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$

SOLUCIÓN: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ Indeterminación del tipo L´Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

10. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$

SOLUCIÓN: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty$ Indeterminado. Para resolver la indeterminación operamos las fracciones algebraicamente:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x+x^2}{1-x^3} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{1-x^3} = \left(\frac{0}{0} \text{ L´Hopital}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{-3x^2} = -1$$

11. $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$

SOLUCIÓN: $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0}$ Indeterminación de tipo L´Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3\operatorname{sen}^2 x \cos x} = \left(\frac{0}{0} \text{ L´Hopital}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{0 - \frac{x \frac{1}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)}}{1-x^2}}{3\left(2\operatorname{sen}x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}\left(1-x^2\right)}}{3\operatorname{sen}x\left(2\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right)} = \left(\frac{0}{0}, \operatorname{sen}x \cong x, x \to 0\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-x}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}}{3x\left(2\cos^2 x - x^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}}{3\left(2\cos^2 x - x^2\right)} = \frac{-1}{6}$$

12. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$

SOLUCIÓN: $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ Indeterminación de tipo L´Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b$$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen }3x}{x-\frac{3}{2}\cdot\text{sen }2x}$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen }3x}{x-\frac{3}{2}\cdot\text{sen }2x}=\dfrac{0}{0-0}=\dfrac{0}{0}$ Indeterminación. Utilizaremos una vez más la equivalencia $\text{sen}(nx)\cong nx, x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }3x}{x-\frac{3}{2}\cdot\text{sen }2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x-\frac{3}{2}\cdot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{-2x}=\frac{-3}{2}$$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\text{cotg}^2 x-\dfrac{1}{x}\right)$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\text{cotg}^2 x-\dfrac{1}{x}\right)=\infty-\infty$ Indeterminado. Escribimos la función cotangente como un cociente:

$$\lim_{x\to 0}\left(\text{cotg}^2 x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x}-\frac{1}{x}\right)=(\text{operando})=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos^2 x-\text{sen}^2 x}{x\text{sen}^2 x}=\left(\frac{0}{0}\,\text{L´Hopital}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-2x\text{senx}\cos x-2\text{senx}\cos x}{\text{sen}^2 x+2x\text{senx}\cos x}=\frac{1}{0}=\infty$$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}-\dfrac{1}{1-\cos x}\right)$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}-\dfrac{1}{1-\cos x}\right)=\dfrac{1}{0}-\dfrac{1}{0}=\infty-\infty$ Indeterminado. Operamos, utilizando la relación trigonométrica fundamental: $sen^2 x=1-\cos^2 x$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\text{sen}^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos^2 x}-\frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{1-\cos^2 x}=-\infty$$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

SOLUCIÓN: Aplicando el teorema de L´hopital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\text{sen}^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\text{sen}^2 x}{x^2\cdot\text{sen}^2 x}\underset{\text{L´H}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\,\text{sen }x\cdot\cos x}{2x\cdot\text{sen}^2 x+x^2\cdot 2\,\text{sen }x\cdot\cos x}=\{2\,\text{sen }x\cdot\cos x=\text{sen }2x\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\text{sen }2x}{2x\,\text{sen}^2 x+x^2\text{sen }2x}\underset{\text{L´H}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{2\,\text{sen}^2 x+2x\cdot 2\text{sen }x\cdot\cos x+2x\,\text{sen }2x+x^2 2\cos 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{2\,\text{sen}^2 x+2x\,\text{sen }2x+2x\,\text{sen }2x+x^2 2\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{2\,\text{sen}^2 x+4x\,\text{sen }2x+2x^2\cos 2x}\underset{\text{L´H}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\,\text{sen}\,2x}{2\cdot 2\,\text{sen}\,x\cdot\cos x + 4\,\text{sen}\,2x + 4x\cdot\cos 2x\cdot 2 + 4x\cos 2x + 2x^2(-\text{sen}\,2x)\cdot 2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\,\text{sen}\,2x}{6\,\text{sen}\,2x + 8x\cos 2x + 4x\cos 2x - 4x^2\text{sen}\,2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{L'H}{=}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{8\overbrace{\cos 2x}^{1}}{12\underbrace{\cos 2x}_{1} + 8\underbrace{\cos 2x}_{1} + 8x\cdot\underbrace{(-\text{sen}\,2x)}_{0}\cdot 2 + 4\underbrace{\cos 2x}_{1} + \underbrace{4x\cdot(-\text{sen}\,2x)}_{0}\cdot 2 - \underbrace{8x\,\text{sen}\,2x}_{0} + \underbrace{4x^2\,\cos 2x\cdot 2}_{0}} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

17. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n - 1}$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1} = \frac{0}{0}$ Indeterminado. Se puede resolver de dos maneras distintas:

1. Utilizando L´Hopital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}$$

2. Sin utilizar L´Hopital, factorizando el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1} = \frac{1}{n}$$

18. $\lim\limits_{x\to 1} \text{Ln}\left(\frac{e^x - e}{x-1}\right)$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{x\to 1} \text{Ln}\left(\frac{e^x-e}{x-1}\right) = \text{Ln}\left(\frac{0}{0}\right)$ Indeterminado.

Como la función logaritmo es continua en su dominio, puede salir fuera del límite, así:

$$\lim_{x\to 1} \text{Ln}\left(\frac{e^x-e}{x-1}\right) = \text{Ln}\left(\lim_{x\to 1}\left(\frac{e^x-e}{x-1}\right)\right)$$

y así, podemos resolver aparte el límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{e^x-e}{x-1}\right)$$

para lo que utilizaremos L´Hopital:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{e^x-e}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{e^x}{1} = e$$

19. $\lim\limits_{x\to 1} \text{Ln}\left(\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x-1}\right)$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{x\to 1} \text{Ln}\left(\frac{e}{e^x-e} - \frac{1}{x-1}\right) = \text{Ln}\left(\frac{e}{0} - \frac{1}{0}\right)$ INDETERMINADO

Ahora bien, por ser la función logaritmo continua en su dominio, la podemos sacar del límite:

$$\lim_{x\to 1} Ln\left(\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x-1}\right) = Ln\left[\lim_{x\to 1}\left(\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x-1}\right)\right] = Ln\left[\lim_{x\to 1}\frac{e(x-1)-(e^x - e)}{(e^x - e)(x-1)}\right] =$$

$$= Ln\left[\lim_{x\to 1}\frac{ex - e^x}{(x-1)(e^x - e)}\right] = (L'Hopital) = Ln\left[\lim_{x\to 1}\frac{e - e^x}{e^x - e + xe^x - e^x}\right] =$$

$$= Ln\left[\lim_{x\to 1}\frac{e - e^x}{xe^x - e}\right] = (L'Hopital) = Ln\left[\lim_{x\to 1}\frac{-e^x}{e^x + xe^x}\right] = Ln\left(\frac{-e}{e+e}\right) = Ln\left(\frac{-1}{2}\right) \notin R$$

Luego no existe el límite.

20. Calcular a para que se cumpla: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+5}{4x+3}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi}\right)^{ax^2}$

SOLUCIÓN: Calculamos los dos límites por separado:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+5}{4x+3}\right)^x = (1^\infty \text{ INDETERMINADO}) = \exp\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+5}{4x+3} - 1\right)x\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{4x+3}\right) = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi}\right)^{ax^2} = (1^\infty \text{ INDETERMINADO}) = \exp\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi} - 1\right)ax^2\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{(1-\pi)ax^2}{4x^2+\pi}\right) = e^{\frac{(1-\pi)a}{4}}$$

Para que ambos límites sean iguales se ha de cumplir:

$$\sqrt{e} = e^{\frac{(1-\pi)a}{4}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{(1-\pi)a}{4} \Rightarrow a = \frac{2}{1-\pi}$$

21. $\lim_{x\to 1} Ln^2\left(\frac{x^2-1}{tg(x-1)}\right)$

SOLUCIÓN: $\lim_{x\to 1} Ln^2\left(\frac{x^2-1}{tg(x-1)}\right) = Ln^2\left(\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{tg(x-1)}\right)\right)$

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{tg(x-1)}\right)$ es un límite de la forma 0/0 Indeterminación del tipo L´Hopital:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{tg(x-1)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x}{1+tg^2(x-1)}\right) = 2$$

Luego el límite dado es:

$$\lim_{x\to 1} Ln^2\left(\frac{x^2-1}{tg(x-1)}\right) = Ln^2 2$$

22. $\lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x} - e^{2x} - x + 1}{e^{2x} - 1}$

SOLUCIÓN: $\lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x} - e^{2x} - x + 1}{e^{2x} - 1} = \left(\frac{0}{0} L'Hopital\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x} + 2xe^{2x} - 2e^{2x} - 1}{2e^{2x}} = \frac{1+0-2-1}{2} - 1$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arcsen} x}{x^3}$

SOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arcsen} x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\text{L´Hopital}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\text{L´Hopital}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-2x}{2\left(\sqrt{1-x^2}\right)}}{\dfrac{1-x^2}{6x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}}{6}=\frac{-1}{6}$$

24. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{arcsen} x-\operatorname{ctg} x)$

SOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{arcsen} x-\operatorname{ctg} x)=(\infty-\infty\text{INDETERMINADO})=\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{arcsenx}-\frac{\cos x}{\operatorname{senx}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{senxarcsenx}-\cos x}{\operatorname{senx}}\right)=\frac{0-1}{0}=-\infty$$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x}}\cdot(1+\operatorname{tg} 2x)^{4/x}\right]$

SOLUCIÓN: Realizando operaciones trigonométricas elementales, podemos relacionar la tangente del ángulo doble con el seno y el coseno de x:

$$\lim_{x\to 0}\left[\sqrt{\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x}}\cdot(1+\operatorname{tg} 2x)^{4/x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\sqrt{\frac{\operatorname{senx}}{\dfrac{2\operatorname{senx}\cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}}}\cdot(1+\tan 2x)^{4/x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\sqrt{\frac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{2\cos x}}\cdot(1+\tan 2x)^{4/x}\right]=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}(1+\tan 2x)^{4/x}=$$

$$=\left(\sqrt{1/2}\cdot 1^{\infty}\text{ INDETERM}\right)=\sqrt{1/2}\cdot\exp\left(\lim_{x\to 0}(1+\tan 2x-1)\frac{4}{x}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{4\tan 2x}{x}\right)=(\text{L¨Hopital})=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\exp\lim_{x\to 0}\frac{4\left(1+\tan^2 2x\right)2}{1}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot e^8$$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{1/x}-e^{2/x}\right)^x$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{1/x}-e^{2/x}\right)^x$ INDETERMINADO

Operando obtenemos:

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{1/x}-e^{2/x}\right)^x=\lim_{x\to 0}\left[e^{1/x}\left(1-e^{1/x}\right)\right]^x=\lim_{x\to 0}e\cdot\left(1-e^{1/x}\right)^x=e\cdot\lim_{x\to 0}\left(1-e^{1/x}\right)^x$$

Luego ahora tenemos que calcular el valor del límite $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-e^{1/x}\right)$ que es de la forma ∞^0 Indeterminado

Sea

$$L=\lim_{x\to 0}\left(1-e^{1/x}\right)\Rightarrow \ln L=\ln\lim_{x\to 0}\left(1-e^{1/x}\right)^x=\lim_{x\to 0}\ln\left(1-e^{1/x}\right)^x=\lim_{x\to 0}x\cdot\ln\left(1-e^{1/x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-e^{1/x}\right)}{1/x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\text{L´Hopital}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{1/x}\cdot 1/x^2}{1-e^{1/x}}}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{1/x}}{1-e^{1/x}}=1\Rightarrow L=e$$

Luego el límite pedido es:

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{1/x}-e^{2/x}\right)^x=e\cdot e=e^2$$

27. $\displaystyle \text{Lím}_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\text{sen }x\cdot(1-\text{sen }x)}{\cos^2 x}$

SOLUCIÓN: Realizando algunas operaciones trigonométricas elementales tenemos:

$$\text{Lím}_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\text{sen }x\cdot(1-\text{sen }x)}{\cos^2 x}=\text{Lím}_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\text{sen}x(1-\text{sen}x)}{1-\text{sen}^2 x}=\text{Lím}_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\text{sen}x(1-\text{sen}x)}{(1-\text{sen}x)(1+\text{sen}x)}=\text{Lím}_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\text{sen}x}{1+\text{sen}x}=\frac{1}{2}$$

28. $\displaystyle \text{Lím}_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x^2}-\cos x}{x^2}$

SOLUCIÓN: $\displaystyle \text{Lím}_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x^2}-\cos x}{x^2}=\frac{0}{0}$ Indeterminación. Podemos aplicar infinitésimos equivalentes esta vez, en lugar de L´Hopital:

$\text{sen}x\cong x, x\to 0$. Así:

$$\text{Lím}_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x^2}-\cos x}{x^2}=\text{Lím}_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-\text{sen}^2 x}-\cos x}{\text{sen}^2 x}=\text{Lím}_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos^2 x}-\cos x}{\text{sen}^2 x}=\left(\frac{0}{0}\text{L´Hopital}\right)=$$

$$=\text{Lím}_{x\to 0}\frac{(\cos x)^{-1/3}\cdot(-\text{sen}x)-\text{sen}x}{2\text{sen}x\cos x}=(\text{simplificando})=\text{Lím}_{x\to 0}-\frac{(\cos x)^{-1/3}+1}{2\cos x}=-1$$

29. $\displaystyle \text{Lím}_{x\to\infty}\left[1+5\cdot\text{tg}\left(\frac{8}{x}\right)\right]^x$

SOLUCIÓN: $\displaystyle \text{Lím}_{x\to\infty}\left[1+5\cdot\text{tg}\left(\frac{8}{x}\right)\right]^x=1^\infty$ Indeterminado. Resolvemos aplicando la fórmula:

$$\text{Lím}_{x\to\infty}\left[1+5\cdot\text{tg}\left(\frac{8}{x}\right)\right]^x=\exp\left(\text{Lím}_{x\to\infty}\left(1+5\text{tg}\left(\frac{8}{x}\right)-1\right)x\right)=\exp\left(\text{Lím}_{x\to\infty}5x\tan\left(\frac{8}{x}\right)\right)=$$

$$=\exp\left(\text{Lím}_{x\to\infty}5\cdot\frac{\text{sen}(8/x)}{\cos(8/x)}\cdot x\right)=\exp\left(\text{Lím}_{x\to\infty}5\cdot\frac{\text{sen}(8/x)}{\cos(8/x)\cdot 1/x}\right)=(\text{inf initésimos equivalentes})=$$

$$=\exp\left(\text{Lím}_{x\to\infty}5\cdot\frac{8/x}{\cos(8/x)\cdot 1/x}\right)=\exp\left(\text{Lím}_{x\to\infty}5\cdot\frac{8}{\cos(8/x)}\right)=e^{40}$$

30. $\displaystyle \lim_{x\to\pi/2}\frac{(\cos x)^2}{(x-\pi/2)^2}\underset{\text{L'H}}{\overset{(0/0)}{=}}\lim_{x\to\pi/2}\frac{-2\cos x\ \text{sen}\ x}{2\cdot(x-\pi/2)}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\text{sen}2x}{2x-\pi}\underset{\text{L'H}}{\overset{(0/0)}{=}}$

$$=\lim_{x\to\pi/2}=\frac{-2\cos 2x}{2}=\frac{-2\cos 2\pi/2}{2}=\frac{-2\cos\pi}{2}=.-1$$

31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 2^x}{x} \underset{L'H}{\overset{(0/0)}{=}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x \cdot \ln 3 - 2^x \cdot \ln 2}{1} = \mathrm{Ln}3 - \mathrm{Ln}2 = \mathrm{Ln}\,\dfrac{3}{2}$

32. Calcular el $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)^{1/n}}{(x-3)^{1/m}}$ en los siguientes casos:

- Si $m > n$
- Si $m = n$
- Si $m < n$

Antes de hacer el límite hay que operar la expresión, ya que es un cociente de exponenciales con igual base.

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^{1/n}}{(x-3)^{1/m}} = \lim_{x\to 3} (x-3)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}} = \lim_{x\to 3} (x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}}$$

- **Si m > n**

$$\lim_{x\to 3} (x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}} = \{m-n = K > 0\} = 0^K = 0$$

- **Si m = n**

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^{1/m}}{(x-3)^{1/m}} = \lim_{x\to 3} 1 = 1$$

- **Si m < n**

$$\lim_{x\to 3} (x-3)^{\frac{m-n}{n\cdot m}} = \{m-n = -K < 0\} = 0^{-K} = \frac{1}{0^K} = \frac{1}{0} = \infty$$

33. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{3\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x - 2}{2\mathrm{tg}^2 x - 5\mathrm{tg}\, x + 3}$

SOLUCIÓN: $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{3\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x - 2}{2\mathrm{tg}^2 x - 5\mathrm{tg}\, x + 3} = \dfrac{0}{0}$ Indeterminado

$$\lim_{x\to \pi/4} \frac{3\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x - 2}{2\mathrm{tg}^2 x - 5\mathrm{tg}\, x + 3} = (\text{L'Hopital}) = \lim_{x\to \pi/4} \frac{6\mathrm{tg}x(1+\mathrm{tg}^2 x) - (1+\mathrm{tg}^2 x)}{4\mathrm{tg}x(1+\mathrm{tg}^2 x) - 5(1+\mathrm{tg}^2 x)} =$$

$$= \lim_{x\to \pi/4} \frac{6\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}^2 x + 6\mathrm{tg}x - 1}{4\mathrm{tg}^3 x - 5\mathrm{tg}^2 x + 4\mathrm{tg}x - 5} = \frac{6-1+6-1}{4-5+4-5} = \frac{10}{-2} = -5$$

34. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} \cdot \left(x - \sqrt{x^2+x+1}\right)}$

SOLUCIÓN: Estudiando las potencias máximas del numerador y del denominador se observa que el numerador es del orden de $x^{1/2}$ mientras que el denominador es de la forma $x^{3/2}$, luego el denominador tiende a infinito más deprisa que el numerador y por tanto:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x} \cdot \left(x - \sqrt{x^2+x+1}\right)} = 0$$