MATEMÁTICAS II

2º Bachillerato. Grupo B. Curso 2009/2010.

Hoja de ejercicios VIII

Cálculo de derivadas. Derivabilidad de una función.

---

1 La ***derivada*** de $f(x)$ en $x_0 \in \text{Dom}(f)$ se define como el límite, si existe y es finito:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Utilizar ambas definiciones para determinar:

1. $f'(5)$ siendo $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

2. $f'(-3)$ siendo $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

3. $f'(6)$ siendo $f(x) = \sqrt{x-1}$

2 Dada una función $f(x)$, se define su ***función derivada*** como el límite (si existe):

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Utilizar dicha definición de función derivada para determinar la derivada de las funciones del ejercicio anterior. Utilizando también la definición de función derivada, determinar $D\ln(x)$.

3 Hallar $Df_i(x) = f_i'(x)$ en los siguientes casos:

(a) $f_1(x) = x^5 - 7x^3 - 2$

(b) $f_2(x) = \sqrt[4]{x^3} - x^{\frac{5}{2}}$

(c) $f_3(x) = \dfrac{2x^3}{\sqrt[6]{x^5}}$

(d) $f_4(x) = 4x^5e^x$

(e) $f_5(x) = \text{sen}(x) \cdot \ln(x)$

(f) $f_6(x) = \text{tg}(x) \cdot \arctan(x)$

(g) $f_7(x) = \dfrac{x^3 - x}{\cos(x)}$

(h) $f_8(x) = \dfrac{\log_2(x)}{\arctan(x)}$

(i) $f_9(x) = \dfrac{4^x}{\sqrt{x}+1}$

4 Hallar $Df_i(x) = f_i'(x)$ en los siguientes casos:

(a) $f_{10}(x) = \dfrac{x^2 \cdot e^x}{\operatorname{sen}(x)}$ **(b)** $f_{11}(x) = \dfrac{\ln(x) + \arctan(x)}{x\cos(x)}$ **(c)** $f_{12}(x) = \dfrac{x\operatorname{tg}(x)}{x^2 - 1}$

(d) $f_{13}(x) = 3^x \ln(x)\cos(x)$ **(e)** $f_{14}(x) = x^3 \cdot \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ **(f)** $f_{15}(x) = \operatorname{tg}[\arctan(x)]$

(g) $f_{16}(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ **(h)** $f_{17}(x) = \dfrac{\log_2(x)}{x^2 + \log_3(x)}$ **(i)** $f_{18}(x) = \dfrac{x\cos(x)}{(x^2+x)\ln(x)}$

5 Determinar las siguientes derivadas:

(a) $\mathrm{D}\ \operatorname{sen}(x^2)$ **(b)** $\mathrm{D}\ 3^{x^2 - \ln(x)}$

(c) $\mathrm{D}\ \sqrt{\ln(x)}$ **(d)** $\mathrm{D}\ \cos(x^2 - 2x + 3)$

(e) $\mathrm{D}\ \ln\Big[x^2 + \operatorname{sen}(x)\Big]$ **(f)** $\mathrm{D}\ \ln\Big[\arctan(x)\Big]$

(g) $\mathrm{D}\ \Big[\sqrt{x} + \operatorname{tg}(x^2)\Big]^3$ **(h)** $\mathrm{D}\ \sqrt{\log_2(e^x + 1)}$

(i) $\mathrm{D}\ \dfrac{2^x - x^3}{\arctan(x^2 - 1)}$ **(j)** $\mathrm{D}\ \ln(x^2 + 3) \cdot \operatorname{sen}^3(x^3)$

(k) $\mathrm{D}\ \Big[\operatorname{sen}(x) + \ln(x)\Big]^{\frac{2}{5}}$ **(l)** $\mathrm{D}\ \arctan^2(e^x)$

6 Determinar las siguientes derivadas:

(a) $\mathrm{D}\ (3x^5 - 2x)^{x^2 - 3x}$ **(b)** $\mathrm{D}\ (x + e^x)^{\operatorname{sen}(x)}$ **(c)** $\mathrm{D}\ \Big[\cos(x)\Big]^{\cos(x)}$

(d) $\mathrm{D}\ \sqrt{x + \sqrt{x+1}}$ **(e)** $\mathrm{D}\ \Big[\sqrt{x} + \operatorname{cotg}(x)\Big]^{1+x^2}$ **(f)** $\mathrm{D}\ \ln\left[\dfrac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\right]$

(g) $\mathrm{D}\ x^{x^x}$ **(h)** $\mathrm{D}\ \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{tg}(x)}{1+\operatorname{tg}(x)}}$ **(i)** $\mathrm{D}\ \ln\sqrt{e^{\operatorname{tg}(x)}}$

7 Comprobar que la siguiente función implícita:

$$\operatorname{sen}(yx^2) - y^2 + x - 2 + \frac{\pi^2}{16} = 0$$

pasa por el punto $(2, \frac{\pi}{4})$. Hallar $y'(2, \frac{\pi}{4})$.

8 Sea la función implícita $y^3 - 7x^2 + 5xy^2 + 17 = 0$. Comprobar que pasa por el punto $(2,1)$ y hallar $y'(2,1)$.

9 Consideremos la función implícita $x^2y^3 + x2y^2 + 5x^3y - 6x = 0$.

1. Hallar los puntos de abscisa $x = -1$ por los que pasa la gráfica de la función.
2. Hallar y' en los puntos determinados en el apartado anterior.

10 Derivar la función implícita que define a la circunferencia de centro $C(-2, 3)$ y diámetro $d = 6$.

11 Derivar la función implícita que define a la circunferencia que pasa por los puntos $A(5, 6)$, $B(6, 5)$ y $C(4, 5)$. Hallar $y'(A)$, $y'(B)$ e $y'(C)$.

12 Hallar los puntos en los que se anula la derivada de:

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$$

¿Representa la ecuación anterior una circunferencia?. En caso afirmativo representarla gráficamente y marcar los puntos en los que se anula la derivada.

13 Comprobar que $f(x) = e^x \cdot \operatorname{sen}(x)$ es solución de la ecuación:

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$$

14 ¿Es $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ solución de $xy' + 1 = e^y$?.

15 Calcular $Dx^{\operatorname{tg}(x)}$

16 Sean $f(x), g(x)$ dos funciones. Calcular $D\left[f(x)\right]^{g(x)}$

17 Hallar la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = \operatorname{sen}(x^x)$
2. $y = [\operatorname{sen}(x)]^x$

18 Hallar la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = x^{\cos^2(x)}$
2. $y = \operatorname{tg}^2(x^x)$
3. $y = \operatorname{arc\,tg}(x^x)$
4. $y = \operatorname{Th}(x^2)$

19 Sea $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \dfrac{1}{1+x^2}$. Comprobar que $f(x)$ es una función constante y determinar el valor $k \in \mathbb{R}$ que la define[1].

20 Hallar la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \textbf{si} \quad x \in]-\infty, 2[\\ 3x-2 & \textbf{si} \quad x \in [2, \infty[\end{cases}$$

Representar las gráficas de $f(x)$ y de $f'(x)$.

21 Hallar la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \textbf{si} \quad x \leq 3 \\ 3x-9 & \textbf{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Representar las gráficas de $f(x)$ y de $f'(x)$.

22 Hallar la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 4x+8 & \textbf{si} \quad x \in]-\infty, -2] \\ 4-x^2 & \textbf{si} \quad x \in]-2, 2[\\ 4x-8 & \textbf{si} \quad x \in [2, \infty[\end{cases}$$

Representar las gráficas de $f(x)$ y de $f'(x)$.

23 Hallar $f'(x)$ siendo:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) & \textbf{si} \quad x < 2 \\ 3x-6 & \textbf{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

24 Hallar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que la siguiente función sea derivable en $x = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} 5+4x-x^2 & \textbf{si} \quad x \leq 3 \\ \alpha x + \beta & \textbf{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

25 Hallar[2] $m, n \in \mathbb{R}$ para que la siguiente función sea derivable en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \textbf{si} \quad x \in]-\infty, 1] \\ -x^2 + nx & \textbf{si} \quad x \in]1, \infty[\end{cases}$$

26 Hallar $m, n \in \mathbb{R}$ para que la siguiente función sea derivable en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 5 & \textbf{si} \quad x \in]-\infty, 0] \\ -x^2 + n & \textbf{si} \quad x \in]0, \infty[\end{cases}$$

[1] Es decir, el valor $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = k, \ \forall x \in \mathbb{R}$

[2] Solución: $m = 2, \ n = -1$