

Problemas resueltos de los teoremas de Rolle, valor medio y Cauchy

1 ¿Es aplicable el **teorema de Rolle** a la función $f(x) = |x - 1|$ en el intervalo $[0, 2]$?

2 Estudiar si la función $f(x) = x - x^3$ satisface las condiciones del **teorema de Rolle** en los intervalos $[-1, 0]$ y $[0, 1]$. en caso afirmativo determinar los valores de c .

3 ¿Satisface la función $f(x) = 1 - x$ las condiciones del **teorema de Rolle** en el intervalo $[-1, 1]$?

4 Probar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución.

5 ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x - 25 = 0$?

6 Demostrar que la ecuación $2x^3 - 6x + 1 = 0$ una única solución real en el intervalo $(0, 1)$.

7 ¿Se puede aplicar el **teorema de Lagrange** a $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$ en $[0, 2]$?

8 ¿Se puede aplicar el **teorema de Lagrange** a $f(x) = 1/x^2$ en $[0, 2]$?

9 En el segmento de la parábola comprendido entre los puntos $A = (1, 1)$ y $B = (3, 0)$ hallar un punto cuya tangente sea paralela la cuerda.

10 Calcular un punto del intervalo $[1, 3]$ en el que la tangente a la curva $y = x^3 - x^2 + 2$ sea paralela a la recta determinada por los puntos $A(1, 2)$ y $B(3, 20)$. ¿Qué teorema garantiza la existencia de dicho punto?

11 Determinar a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{Si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & \text{Si } x \geq 4 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del **teorema de Lagrange** en el intervalo $[2, 6]$.

12 Aplicar el **teorema de Cauchy** a las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

13 Analizar si el **teorema de Cauchy** es aplicable en el intervalo $[1, 4]$ a las funciones:

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \text{ y } g(x) = x^3 - 7x^2 + 120x - 5.$$

En caso afirmativo, aplicarlo.

Solución problemas resueltos de los teoremas de Rolle, valor medio y Cauchy

1

¿Es aplicable el **teorema de Rolle** a la función $f(x) = |x - 1|$ en el intervalo $[0, 2]$?

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{Si } x \in [0, 1) \\ x - 1 & \text{Si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

La función es continua en $[0, 2]$.

No es aplicable el **teorema de Rolle** porque la solución no es derivable en el punto $x = 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{Si } x \in (0, 1) \\ 1 & \text{Si } x \in [1, 2) \end{cases}$$

$$f'(1^-) = -1 \quad f'(1^+) = 1$$

2

Estudiar si la función $f(x) = x - x^3$ satisface las condiciones del **teorema de Rolle** en los intervalos $[-1, 0]$ y $[0, 1]$. en caso afirmativo determinar los valores de c .

$f(x)$ es una función continua en los intervalos $[-1, 0]$ y $[0, 1]$ y derivable en los intervalos abiertos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$ por ser una función polinómica.

Además se cumple que:

$$f(-1) = f(0) = f(1) = 0$$

Por tanto es aplicable el **teorema de Rolle**.

$$f'(c) = 0 \quad 1 - 3c^2 = 0 \quad c = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \in (-1, 0) \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \in (0, 1)$$

3

¿Satisface la función $f(x) = 1 - x$ las condiciones del **teorema de Rolle** en el intervalo $[-1, 1]$?

La función es continua en el intervalo $[-1, 1]$ y derivable en $(-1, 1)$ por ser una función polinómica.

No cumple **teorema de Rolle** porque $f(-1) \neq f(1)$.

4

Probar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución.

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo.

Si la función tuviera dos raíces distintas x_1 y x_2 , siendo $x_1 < x_2$, tendríamos que:

$$f(x_1) = f(x_2) = 0$$

Y como la función es continua y derivable por ser una función polinómica, podemos aplicar el **teorema del Rolle**, que diría que existe un $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 2 + 6x + 12x^2 \quad f'(x) = 2(1 + 3x + 6x^2).$$

Pero $f'(x) \neq 0$, no admite soluciones reales porque el **discriminante** es negativo:

$$\Delta = 9 - 24 < 0.$$

Como la derivada no se anula en ningún valor está en contradicción con el **teorema de Rolle**, por lo que la hipótesis de que existen dos raíces es falsa.

5

¿Cuántas raíces tiene la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x - 25 = 0$?

La función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x - 25$ es continua y derivable en \mathbb{R} .

Teorema de Bolzano.

$$f(0) = -25$$

$$f(2) = 37$$

Por tanto la ecuación tiene al menos una solución en el intervalo $(0, 2)$.

Teorema de Rolle.

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 15$$

Dado que la derivada no se anula, ya que su **discriminante** es negativo, la función es estrictamente creciente y posee una única raíz.

6

Demostrar que la ecuación $2x^3 - 6x + 1 = 0$ una única solución real en el intervalo $(0, 1)$.

La función $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ es continua y derivable en \mathbb{R} .

Teorema de Bolzano.

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = -3$$

Por tanto la ecuación tiene al menos una solución en el intervalo $(0, 1)$.

Teorema de Rolle.

$$f'(x) = 6x^2 - 6 \quad 6x^2 - 6 = 0 \quad 6(x - 1)(x + 1) = 0$$

La derivada se anula en $x = 1$ y $x = -1$, por tanto no puede haber dos raíces en el intervalo $(0, 1)$.

7

¿Se puede aplicar el **teorema de Lagrange** a $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$ en $[0, 2]$?

$f(x)$ es continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$ por tanto se puede aplicar el **teorema del valor medio**:

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c) \quad f'(c) = 3$$

$$8c - 5 = 3$$

$$c = 1$$

8

¿Se puede aplicar el **teorema de Lagrange** a $f(x) = 1/x^2$ en $[0, 2]$?

La función no es continua en $[-1, 2]$ ya que no está definida en $x = 0$.

9

En el segmento de la parábola comprendido entre los puntos $A = (1, 1)$ y $B = (3, 0)$ hallar un punto cuya tangente sea paralela a la cuerda.

Los puntos $A = (1, 1)$ y $B = (3, 0)$ pertenecen a la parábola de ecuación $y = x^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} 1 = 1 + b + c \\ 0 = 9 + 3b + c \end{cases} \quad b = -\frac{9}{2} \quad c = \frac{9}{2}$$

$$y = x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2}$$

Por ser la función polinómica se puede aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[1, 3]$.

$$f'(c) = 2c - \frac{9}{2}$$

$$\frac{9 - \frac{27}{2} + \frac{9}{2} - 1 + \frac{9}{2} - \frac{9}{2}}{2} = 2c - \frac{9}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = 2c - \frac{9}{2} \quad c = 2 \quad f(c) = 4 - 9 + \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

10

Calcular un punto del intervalo $[1, 3]$ en el que la tangente a la curva $y = x^3 - x^2 + 2$ sea paralela a la recta determinada por los puntos $A(1, 2)$ y $B(3, 20)$. ¿Qué teorema garantiza la existencia de dicho punto?

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos.

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{20-2} \quad 9x - 9 = y - 2 \quad y = 9x - 7$$

Por ser $y = x^3 - x^2 + 2$ continua en $[1, 3]$ y derivable en $(1, 3)$ se puede aplicar el **teorema del valor medio**:

$$\frac{20-2}{3-1} = f'(c) \quad f'(c) = 9$$

$$3c^2 - 2c = 9 \quad 3c^2 - 2c - 9 = 0$$

$$c = \frac{2 + \sqrt{112}}{6} \in (1, 3)$$

$$c = \frac{2 - \sqrt{112}}{6} \notin (1, 3)$$

11

Determinar a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{Si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & \text{Si } x \geq 4 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del **teorema de Lagrange** en el intervalo [2, 6].

En primer lugar se debe cumplir que la función sea continua en [2, 6].

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$$

$$4a - 3 = -16 + 40 - b$$

$$a + b = 27$$

En segundo lugar se debe cumplir que la función sea derivable en (2, 6).

$$f'(4^-) = f'(4^+)$$

$$a = -2 \cdot 4 + 10$$

$$a = 2$$

$$b = 19$$

12

Aplicar el **teorema de Cauchy** a las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

Las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$ son continuas y derivables en toda la recta real.

Y en particular son continuas en el intervalo $[0, \pi/2]$ y derivables en $(0, \pi/2)$.

$$g(\pi/2) \neq g(0)$$

Por lo tanto podemos aplicar el **teorema de Cauchy**:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos 0} = \frac{\cos c}{-\sin c}$$

$$\frac{1 - 0}{0 - 1} = -\operatorname{tg} c$$

$$\operatorname{tg} c = 1$$

$$c = \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$g'(c) \neq 0 \quad -\sin(\pi/4) \neq 0.$$

13

Analizar si el **teorema de Cauchy** es aplicable en el intervalo [1, 4] a las funciones:

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \text{ y } g(x) = x^3 - 7x^2 + 120x - 5.$$

En caso afirmativo, aplicarlo.

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[1, 4]$ y derivables en $(1, 4)$ por ser polinómicas, además se cumple que $g(1) \neq g(4)$.

Por lo tanto se verifica el **teorema de Cauchy**:

$$\frac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \frac{11 - 2}{27 - 9} = \frac{2c - 2}{3c^2 - 14c + 20}$$

$$3c^2 - 14c + 20 = 4c - 4c^2 - 6c + 8 = 0$$

$$c = 2 \in (1, 4)$$

$$c = 4 \notin (1, 4)$$

$$g'(c) \neq 0$$

$$3 \cdot 2^2 - 14 \cdot 2 + 20 \neq 0$$