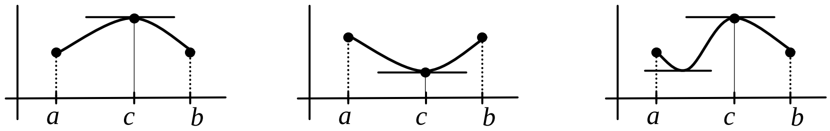
TEOREMAS DEL VALOR MEDIO

• Teorema de Rolle

Si $f(x)$ es continua en [*a*, *b*] y derivable en (*a*, *b*), y si $f(a) = f(b)$, entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f´(c) = 0$.

• Interpretación geométrica: existe un punto –al menos– de ese intervalo, en el que la tangente a la curva es horizontal.



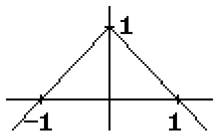
En ese punto *c* (en alguno de ellos si hay varios) se da el máximo o el mínimo de $f(x)$ en ese intervalo.

Ejemplos:

- La función $f(x) = x^2 + x + 2$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [–2, 1], pues:
  - es continua y derivable en todo **R**; en particular en el intervalo [–2, 1].
  - $f(-2) = 4$ y $f(1) = 4$. Esto es, toma el mismo valor en los extremos del intervalo.

En consecuencia, existe un punto $c \in (-2, 1)$ en el que su derivada vale 0: $f´(x) = 2x + 1 = 0$ $\Rightarrow$ $x = -1/2$. Este es el valor *c* que asegura el teorema.

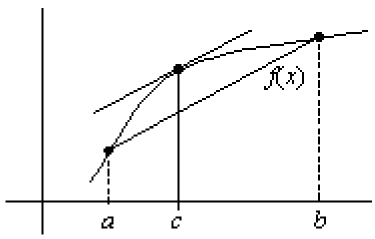
- La función $f(x) = 1 - |x|$ no satisface las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo [–1, 1], pues no es derivable en el punto *x* = 0 de ese intervalo.



• Teorema del valor medio (Lagrange)

Si $f(x)$ es continua en [*a*, *b*] y derivable en (*a*, *b*), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f´(c)$.

• Interpretación geométrica: existe un punto perteneciente al intervalo en el que la tangente a $f(x)$ es paralela a la secante que pasa por los puntos de abscisa *a* y *b*.
De otro modo: existe un punto del intervalo en el que la tasa de variación instantánea coincide con la tasa de variación media de todo el intervalo.



• Interpretación física: si se realiza un trayecto a velocidad media *v*, en algún instante de ese trayecto se ha llevado esa velocidad *v*.

Ejemplo:

- La función $f(x)=x^3-6x$ es continua y derivable en el intervalo $[-2, 1] \Rightarrow \exists\, c,\ -2 < c < 1$ tal que $\dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)} = f´(c)$.

En efecto: $\dfrac{-5-4}{1-(-2)} = 3x^2-6 \Rightarrow\ -3=3x^2-6 \Rightarrow\ x^2=1 \Rightarrow x = -1,\ x = 1$.

El valor que cumple el teorema es x = –1, el número que pertenece a (–2, 1)

- **Diversas formas de expresión del teorema**

De $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f´(c) \Rightarrow\ f(b) = f(a) + f´(c)(b-a)$

Si se toma $x \in (a, b)$ puede escribirse: $f(x) = f(a) + f´(c)(x-a)$, con $c \in (a, x)$

Si se hace $b = a + h$, se tendrá: $f(a+h) = f(a) + h\cdot f´(c)$, $c \in (a, a + h)$

Si se toma $x = a + h$, se tendrá: $f(x) = f(a) + h\cdot f´(a+\theta h)$, $0 < \theta < 1$, $c \in (a, x)$

Ejemplo:

- Aplicamos el teorema de los incrementos finitos al cálculo aproximado de $\sqrt{102}$.

Si se toma $f(x)=\sqrt{x}$, para x = 102, a = 100 y h = 2, se tiene:

$$f(102) = f(100) + 2\cdot f´(100+2\theta) \Leftrightarrow\ \sqrt{102} = \sqrt{100} + 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{100+2\theta}},\ \text{pues } f´(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Como $f´(100+2\theta) = \dfrac{1}{2\sqrt{100+2\theta}} \approx \dfrac{1}{2\sqrt{100}} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05$, el valor aproximado pedido será:

$$\sqrt{102} = \sqrt{100} + 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{100+2\theta}} \approx 10 + 2 \cdot 0{,}05 = 10{,}1$$

NOTAS: 1. El valor obtenido con la calculadora es: $\sqrt{102} = 10{,}0995...$ La aproximación es muy buena.

2. Puede observarse que aplicando la diferencial (véase) se llega al mismo resultado.

- **Algunas consecuencias más**

A partir de cualquiera de estas expresiones pueden demostrarse fácilmente algunas propiedades de uso frecuente. Entre ellas:

1. Si una función $f(x)$ es tal que $f´(x)=0$ para todo x de un intervalo, entonces $f(x)$ es constante en el intervalo.

   Si $f´(x)=0$, de $f(x) = f(a) + f´(c)(x-a) \Rightarrow\ f(x) = f(a)$ = cte.

2. Si $f(x)$ y $g(x)$ verifican que $f´(x) = g´(x)$ para todo x de un intervalo, entonces $f(x)$ y $g(x)$ se diferencian en una constante. (Pues $f-g$ cumple que $f´-g´= 0$)

3. Si una función $f(x)$ es tal que $f´(x)>0$ para todo x de un intervalo, entonces $f(x)$ es creciente en el intervalo.

   Si $f´(x)>0$, de $f(a+h) = f(a) + h\cdot f´(c) \Rightarrow\ f(a+h) > f(a)$

   Análogamente, si $f´(x)<0$ para todo x de un intervalo, entonces $f(x)$ es decreciente en el intervalo.

- **Teorema de Cauchy**

Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en [a, b] y derivables en (a, b), y si $g(b) \neq g(a)$ y $f´(x)$ y $g´(x)$ no son ceros a la vez, entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f´(c)}{g´(c)}$

Otra forma del teorema:
Con las mismas hipótesis, si tomamos $a < x < b$, existe un punto $c \in (a, x)$ tal que

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f´(c)}{g´(c)} \Leftrightarrow \left[f(x)-f(a)\right]g´(c) = \left[f(x)-g(a)\right]f´(c)$$

APLICACIÓN AL CÁLCULO DE LÍMITES. REGLA DE L´HÔPITAL

- **Indeterminaciones:**

En el cálculo de límites pueden aparecer siete expresiones (formas) indeterminadas. Son:

$$\left[\frac{0}{0}\right] \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad [0 \cdot \infty] \quad [\infty - \infty] \quad [1^{\infty}] \quad [0^0] \quad [\infty^0]$$

Las dos primeras pueden resolverse aplicando la regla de L´Hôpital; las otras cinco formas habrá que transformarlas previamente para poder aplicar dicha regla.

- **Regla de L´Hôpital para resolver la indeterminación** $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, siendo g(x) ≠ 0 en un entorno de a, entonces, si existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f´(x)}{g´(x)}$, se cumple que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f´(x)}{g´(x)}$

(Esto es válido si a se sustituye por a^+, a^-, $+\infty$, o $-\infty$.)

NOTA: La regla dice que "el límite de un cociente es igual al límite del cociente de las derivadas"; y NO al límite de la derivada del cociente.

Ejemplos:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{senx}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ → aplicando la regla de L´Hôpital (L´H) se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

ERROR: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{senx}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x \cdot x - x \cdot senx}{x^2}$ = (?) → OJO: no se hace la derivada del cociente.

- $\lim\limits_{x\to -\pi/4} \dfrac{3tag^2 x + tagx - 2}{2tag^2 x + 5tagx + 3} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ (recuerda que tag(−π/4) = −1)

Aplicando L´H se tiene:

$$\lim_{x\to -\pi/4} \frac{3tag^2 x + tagx - 2}{2tag^2 x + 5tagx + 3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -\pi/4} \frac{6tagx(1+tag^2 x) + 1 + tag^2 x}{4tagx(1+tag^2 x) + 5(1+tag^2 x)} = \frac{-10}{2} = -5$$

- **Regla de L´Hôpital para resolver la indeterminación** $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, entonces, si existe $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, se cumple que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(Esto es válido si a se sustituye por a^+, a^-, $+\infty$, o $-\infty$.)

Ejemplos:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1/x}=\dfrac{1}{0}=\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=\dfrac{2}{\infty}=0$

- **Resolución de las formas [0 · ∞] y [∞ – ∞]**

Para resolverlas se reducen, operando previamente, a alguna de las formas $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ o $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

Ejemplos:

- $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cot agx=[0\cdot\infty]$. (Recuerda que cotag 0 = 1/tag 0 = 1/0 = ∞)

Sustituyendo cotag x por 1/tag x se tiene:

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cot agx=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{tagx}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=\lim_{x\to 0}\frac{senx}{1+tag^2x}=\frac{0}{1}=0$$

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)=[\infty-\infty]$.

Haciendo la resta indicada se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-e^x+1}{(e^x-1)x}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{e^xx+e^x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{e^xx+2e^x}=-\frac{1}{2}$$

- **Resolución de las formas [1^∞], [0^0] y [∞^0]**

Si al intentar calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ aparece alguna de estas formas (esto es: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \left[1^\infty\right]$, o $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \left[0^0\right]$, o $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \left[\infty^0\right]$) se calculará, si se puede, el límite $\lim\limits_{x\to a} \ln(f(x))$. Con esto, la indeterminación inicial se transforma en otra del tipo [0 · ∞], que se resolverá como se ha indicado antes.

Una vez resuelto, si $\lim\limits_{x\to a} \ln(f(x)) = L$, se tiene que el límite buscado vale $\lim\limits_{x\to a} f(x) = e^L$.

NOTAS: 1. Los límites cumplen la siguiente propiedad: $\lim\limits_{x\to a} \ln\left[f(x)\right] = \ln\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]$.

2. Recuérdese la definición de logaritmo, $\ln A = L \Leftrightarrow A = e^L$; y la propiedad: $\ln(B^p) = p \cdot \ln B$. (Aunque resulte matemáticamente *chirriante*, esta propiedad justifica el paso de las formas [1^∞], [0^0] y [∞^0] a la forma [0 · ∞]. Véase un caso: $\ln[1^\infty] \to \infty \cdot L\,1 \to [\infty \cdot 0]$)

Ejemplos:

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left[1^\infty\right]$ → Aplicando logaritmos: $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \left[\infty\cdot 0\right] =$

$$= \text{(transformando)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \text{(L´H)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$

NOTA: Este resultado se toma como definición de *e*.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \left[0^0\right]$ → Aplicando logaritmos: $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \left[0\cdot(-\infty)\right] =$

$$= \text{(transformando)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L´H) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$.

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+4\right)^{1/\ln x} = \left[\infty^0\right]$ → Aplicando logaritmos:

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(x^2+4\right)^{1/\ln x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}\ln\left(x^2+4\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^2+4\right)}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \text{(L´H)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x/(x^2+4)}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \text{(L´H)} = \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{2x} = 2$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+4\right)^{1/\ln x} = e^2$