9.7. EJERCICIOS

1. En la oficina de correos, están expuestas las tarifas del servicio de cartas, que son:

   * Cartas de hasta 20 gr. de peso, 0'25 euros.

   * Por cada 10 gr. o fracción de exceso de peso se añaden 2 céntimos de euro más.

   a) Escribe la fórmula de la función $f(x)$ que relaciona el peso de cada carta x, con el precio que nos cuesta enviarla, $f(x)$, hasta 50 gr.

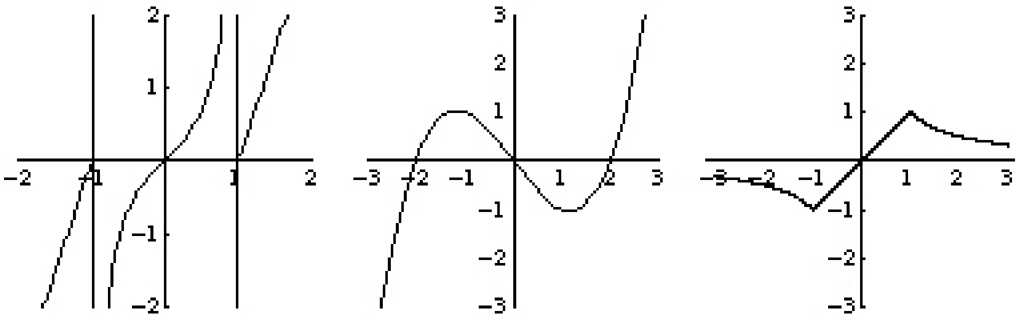
   b) Representa gráficamente $f(x)$ e indica sus puntos de discontinuidad.

2. Para cada una de las gráficas, estudia sus principales características y calcula los límites que se indican:

$$a) \lim_{x\to -2^+} f(x) \quad b) \lim_{x\to -2^-} f(x) \quad c) \lim_{x\to -2} f(x)$$

$$d) \lim_{x\to -\infty} f(x) \quad e) \lim_{x\to 2^+} f(x) \quad f) \lim_{x\to \infty} f(x)$$

$$g) \lim_{x\to 2^-} f(x) \quad h) \lim_{x\to 2} f(x) \quad i) \lim_{x\to 0} f(x)$$



3. Un grave problema ecológico es la destrucción cotidiana de grandes extensiones de arbolado. Supongamos que este fenómeno pasa a regirse por una función logarítmica $y = ln\ x$, donde x es el tiempo en años e y es el número de millares de hectáreas de bosque que han desaparecido hasta ese momento. Contesta, basándote en el análisis de la gráfica de dicha función, a las cuestiones:

   a) Expresa la fórmula matemática que te da la superficie destruida anualmente. ¿Puedes asegurar que dicha destrucción anual permanecerá acotada por debajo de cierto valor en un futuro lejano?

   b) ¿Es cierto que, siguiendo esta función, cada año se destruirá menos que el anterior?

   c) ¿Puedes concluir, en consecuencia, que nunca llegará un momento en el que desaparecerán todos los árboles?.

4. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + b & si \quad x \leq -1 \\ 3x^2 + 4 & si \quad -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

   donde b es un número real.

   a) Calcula el valor de b para que f(x) sea continua en todo su dominio.

   b) Calcula los límites: $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to \infty} f(x)$.

5. Sea $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 3 & \text{si } 1 < x < 3 \\ |x^2 - 6x| & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

   a) Representar gráficamente $f(x)$

   b) A partir de la gráfica de $f(x)$ obtener las de $g(x) = f(x-1)$ y $h(x) = |f(x)|$.

   c) Estudiar razonadamente la continuidad de $f(x)$.

   d) Determinar, a partir de la gráfica de $f(x)$, los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

   e) Obtener $f^{-1}(3)$.

   f) Calcular: $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) \quad \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$

6. Calcular las asíntotas de las curvas y representarlas en las cercanías de las asíntotas:

   a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ b) $g(x) = \dfrac{x^3-x-2}{2x^2-8}$ c) $h(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

   d) $f(x) = \dfrac{3x^2-6}{x^2}$ e) $g(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^3+1}$ f) $h(x) = \dfrac{x^2-x}{\sqrt{x+1}}$

7. Representar gráficamente la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ -3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

   Indíquese además $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} f(x)$ y clasifíquese la discontinuidad en el punto $x = -1$.

   Hállense, asimismo: $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) \quad \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$

8. Dibujar, si es posible, la gráfica de una función f que verifique $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$ y que alcance en $x = 1$ y $x = 3$ sendos máximos relativos y en $x = 2$ un mínimo relativo.

9. Obtener la expresión y dibujar la gráfica de una función $y = f(x)$ continua que cumpla las condiciones siguientes:

   - Pasa por el punto $(0, 2)$.
   - En el intervalo [0,5], cada vez que x aumenta su valor una unidad, y aumenta su valor en una cantidad constante c.
   - Para $x = 5$, y vale 12.
   - En el intervalo [5,10], cada vez que x aumenta su valor en dos unidades, y disminuye el suyo en 3.

   Razonar los pasos realizados.

10. La temperatura T de una reacción química viene dada, en función del tiempo t en horas, por la expresión:

$$T(t) = 2t - t^2$$

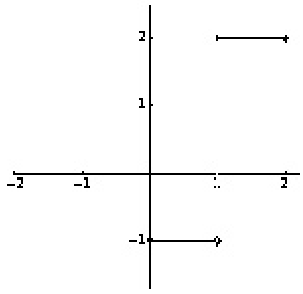
   ¿Qué temperatura habrá a los 15 minutos? ¿En qué momento volverá a alcanzarse esta misma temperatura?. Hallar las temperaturas máxima y mínima y los momentos en los que se producen.

11. La figura adjunta representa la gráfica de una función $f(x)$ en el intervalo [0,2). Dibujar la gráfica de dicha función en el intervalo (-2,2) y determinar su expresión analítica en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x)$ es periódica de período 2.

b) $f(x)$ es par.

c) $f(x)$ es impar.



12. Representar gráficamente la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

13. Sea:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{-1}{x} & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) Representar $f(x)$.

b) Estudiar su continuidad analíticamente.

c) Obtener la gráfica de la función $|f(x)|$.

d) Estudiar, a partir de la gráfica, la monotonía de $f(x)$.

e) Determinar para que x es $f(x) = 1$.

14. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones: a) $f(x) = \begin{cases} |3-x| & \text{si } x \leq 5 \\ ln\ e^2 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 3^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Calcular, en cada caso, $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) \quad \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$

15. La función $f(x) = \dfrac{1}{90}(-x^2 + 100x - 1600)$ representa el beneficio, expresado en miles de €, que obtiene una empresa por la fabricación de x unidades de un determinado producto.

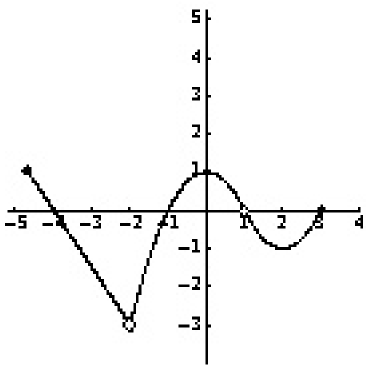
a) Represente gráficamente dicha función.

b) ¿Cuántas unidades hay que fabricar para que no se produzcan pérdidas?

c) ¿Cuál es el mayor beneficio posible?¿Cuántas unidades deben fabricarse para obtenerlo?

16. Determinar el dominio, recorrido, puntos de discontinuidad y clasificación de éstos, así como la expresión algebraica de la función cuya gráfica es la de la figura.

    Hállense, asimismo: $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} f(x) \quad \lim\limits_{x \longrightarrow -1} f(x)$



17. Dibujar la gráfica y escribir las ecuaciones de una función real que cumpla lo siguiente: sea continua en todos los puntos, sea lineal si $x < -3$, cuadrática en el intervalo cerrado $[-3, 3]$ y tienda a 0 cuando x tiende a ∞.

18. El índice de inflación de cierto país fue variando, durante un año, según la expresión:

$$i(t) = 15t + \frac{t^2 - 8t}{20}$$

    donde t es el tiempo en meses desde principios de año. Se pide:

    a) Representar gráficamente $i(t)$.

    b) ¿Durante qué meses el índice de inflación fue creciendo?

    c) ¿A partir de qué mes se supera la inflación inicial del mes de enero?

    d) Si el gobierno tiene previsto devaluar la moneda del país cuando el índica de inflación alcance el valor de 16'5, ¿en qué mes tomará la decisión?

19. Un vendedor de enciclopedias recibe, como sueldo mensual, una cantidad fija de 500 € más una comisión que depende del número de enciclopedias que venda según la expresión $10x - 0'0025x^3$, donde x representa el número de enciclopedias. El vendedor debe correr con sus propios gastos, y tiene unos fijos de 100 € más otros variables, que estima en 7€ por cada enciclopedia que vende. Se pide:

    a) Obtener la función que recoge el sueldo mensual del vendedor.

    b) Determinar la función de gastos.

    c) Obtener la función de beneficios del vendedor.

    d) ¿Cuántas enciclopedias debe vender para obtener el máximo beneficio mensual?. Calcular dicho beneficio.

20. Calcula el valor de k para que la función:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{si } \; x \neq -2 \\ k & \text{si } \; x = -2 \end{cases}$$

    sea continua en todo su dominio.

21. Una compañía de transportes ha comprobado que el número de viajeros diarios depende del precio del billete, según la función:

$$n(x) = 30 - 0'06x$$

donde $n(x)$ es el número de viajeros cuando x es el precio del billete. Obtener:

a) La función que exprese los ingresos diarios (I) de esta empresa en función del precio del billete (x).

b) El precio del billete que hace máximos dichos ingresos y cuáles son tales ingresos.

22. El dueño de un manantial de agua llega a la conclusión de que, si el precio al que vende la botella es x €, sus beneficios, en €, vendrán dados por la fórmula:

$$B(x) = \frac{2}{5}x - x^2 + \frac{399}{25}$$

Representa la función precio-beneficio e indica cuál será el precio de la botella para obtener beneficio máximo.

23. Algunos expertos estimaron, a comienzos de los años 90, que el número de enfermos de sida crecía a un ritmo dado por la fórmula:

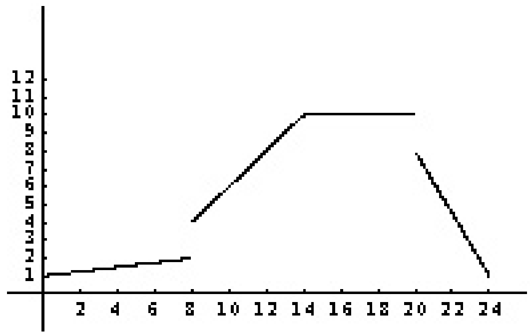
$$E(t) = 1000(1 + 0'20)^t$$

siendo t el número de años que transcurren desde 1990.

a) Calcula el número aproximado de enfermos en 1993, 2000 y 2004.

b) ¿Cuánto tardará en duplicarse el número de afectados?

24. La siguiente gráfica representa el consumo de electricidad (en miles de kwh) de cierta empresa, en función de la hora del día. Determina su expresión analítica.



25. Representar gráficamente:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ -2 & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{si } x < -3 \text{ o } x > 3 \end{cases}$$

Indicar los puntos de discontinuidad de dicha función y representar $|f(x)|$.

Calcular también: $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) \quad \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$

26. El rendimiento físico ante determinado esfuerzo muscular (evaluado en una escala de 0 a 100) de cierto deportista de élite durante un tiempo de 60 minutos, viene dado a través de la función:

$$R(t) = \begin{cases} -t(t-20) & \text{si } 0 \leq t < 15 \\ 75 & \text{si } 15 \leq t < 30 \\ 100 - \dfrac{5}{6}t & \text{si } 30 \leq t < 60 \end{cases}$$

a) Representa dicha función.

b) Comenta sus principales aspectos.

27. Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida vendrá dado durante los próximos años, por la función $f(t) = \dfrac{15000t + 10000}{2t + 2}$, siendo t el número de años transcurridos. Se pide:

a) Tamaño actual de la población.

b) ¿Cómo evoluciona el tamaño de la población entre los años 4 y 9?

c) Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Justifica la respuesta.

28. Se ha investigado el tiempo (T en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función de entrenamiento de los deportistas (x en días), obteniéndose que:

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{300}{x+30} & \text{si } 0 \leq x \leq 30 \\ \dfrac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2 & \text{si } x > 30 \end{cases}$$

a) Justifica que la función T es continua en todo su dominio.

b) ¿Se puede afirmar que cuánto más se entrene un deportista menor será el tiempo en realizar la prueba? ¿Algún deportista tardará más de 10 minutos en finalizar la prueba?

c) Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de un minuto? ¿Y en menos de 2 minutos?

29. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5}-(x+2))$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x-4}{6x-2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$

c) $\lim_{x\to-2}\frac{2x^2-8}{x^2+x-2}$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-2x+3}{2x+1}-\frac{6x-9}{4}\right)$

e) $\lim_{x\to-1}\frac{2x+1}{x+1}$

f) $\lim_{x\to3}\frac{3-x}{2\sqrt{x+1}-4}$

g) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x+1}-(x+1)\right)$

h) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3(2x-3)}{\sqrt{x^4-2}}$

i) $\lim_{x\to3}(7-2x)^{\frac{7}{x-3}}$

j) $\lim_{x\to1}\frac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$

k) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^6+4x}{8x^8-7x^2+13}$

l) $\lim_{x\to0}\frac{2x^3-6x^2+5x}{1+2x-5x^3}$

m) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+5x}{5x-3}\right)^{x^2}$

n) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$

o) $\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-6x+9}$

p) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x}\right)^{x}$

q) $\lim_{x\to1}\frac{x^5-1}{x^2-1}$

r) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+4}-3x}{2x+1}$

s) $\lim_{x\to4}(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+7x})$

t) $\lim_{x\to0}\left(\frac{-2x+5}{3-x}\right)^{x}$

u) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^3-1}$

v) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

w) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^3+3x}-x^2)$

x) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-x)$

y) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3}{-2x^2+4}$

z) $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2-4}{x}$

α) $\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}$

β) $\lim_{x\to1}\frac{(1+x)^2-4}{1-x}$

γ) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

δ) $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-4x+4}$

ϵ) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$

ζ) $\lim_{x\to0}\frac{x}{1-\sqrt{5x+1}}$

η) $\lim_{x\to2}\frac{2-x}{2x^2-4x}$