Julián Moreno Mestre
www.juliweb.es   tlf. 629381836

Límites

Ejercicios:

1º Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^x$ b) $\lim_{x\to\infty}(0.5)^x$ c) $\lim_{x\to\infty}2^{x+1}$ d) $\lim_{x\to\infty}3^{x-1}$ e) $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{2}$

f) $\lim_{x\to\infty}1^x$ g) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$ h) $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{\frac{1}{2}}$ i) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ j) $\lim_{x\to\infty}e^{-x}$

Sol: a) ∞; b) 0; c) ∞; d) ∞; e) 1; f) 1; g) 0; h) 1; i) 1; j) 0;

2º Calcula los siguientes limites (no vale hacerlo a ojo):

a) $\lim_{x\to\infty}x^2-x$ b) $\lim_{x\to\infty}x^3-x^2+x-1$

c) $\lim_{x\to\infty}x^4-4x^3-x^2-5x-1$ d) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^3-x^2+2x}{x^5+x^2+x+1}$

e) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^5+x^4+3x^3+x^2+1}{x^5+x+1}$ f) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5+x^3-5x^2-4}{x^5-x^4-x^3-x-10}$

g) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-2x^2-4x+8}$ h) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x^5-3}{x^5-x^4+x^2+x^5}$

i) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-5x^3-10x^2-100x}{x^3+x^2+x}$ j) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x+x^3+4}{2x^3+x+x^3+x^3}$

k) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-2}$ l) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[3]{x^4}+\sqrt{x}+x^2+1}{x^2+\sqrt[5]{x^4}+\sqrt{x^3}+\sqrt{x^4}}$

Sol: a) ∞; b) ∞; c) ∞; d) 0; e) 5; f) 3; g) 1; h) 1/2; I) ∞; j) 1; k) ½; l) ½;

3º Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2-x}}$ b) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3-x^2-x}}{\sqrt{x^2+x+5}}$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^6+5x}}{\sqrt{x^4-3x}}$ d) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}{2}$

e) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2}$ f) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}$

g) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-x}-x$ h) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-5}-x$

i) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-1}$ j) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}}$

k) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}}$ l) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-2x+1}}{\sqrt{x^2+6x+9}-\sqrt{x^2-6x+9}}$

Sol: a) 0; b) ∞; c) 1; d) 0; e) 0; f) 0; g) –½; h) 0; i) 1; j) 0; k) 0; l) 1/3;

4º Calcule los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{x^2-x}-\pi x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\left(\dfrac{x^2+\pi x^5-3}{2x^5-x^4+x^2}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\dfrac{ex^2+4x}{x^2-1}\right)^{\sqrt[x]{2}}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \log\sqrt{\dfrac{10x^3-x^2+8}{x^3-2x^2-7x}}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos\left(\sin\left(\dfrac{x^2-1}{x^3}\right)\right)$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} 100^{\frac{x^2-2x}{2x^2}}$

Sol: a) –1; b) 1; c) 1; d) ½; e) 1; f) 10;

5º Calcule los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x}+e^x}{e^x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{4x}+2^{2x}-2^x-4}{2^{4x}-2^{2x}-2^x}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{16^x-8^x-4^x-2^2}{32^{x/2}-2^x}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7\cdot 9^x+3^{2x}-3^x}{2\cdot 3^{2x}-3^x}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10^{2x+1}+10^x-10}{10^{2x-1}-10^x}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3\cdot 125^{x-1/3}+2\cdot 25^x-5}{5^{3x-1}-5^x}$

Sol: a) ∞; b) 1; c) 1; d) 4; e) 100; f) 3;

6º Calcule el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-7x+12}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+6}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-9x^2+27x-27}{x^2-9}$ d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-8x^2+19x-12}{x^3-6x^2+11x-6}$

e) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{2x^3+5x^2+4x+1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3-3x^2+7x}{3x^3+2x^2-x}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}{2x^4-4x^3+5x^2-6x+3}$ h) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^4-12x^3+19x^2-6x+9}{x^4+x^3-10x^2-x-15}$

i) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4+2x^3-2x-1}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$ j) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^4+12x^3+24x^2+16x}{x^4+7x^3+18x^2+20x+8}$

k) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^5-3x^4-9x^3+27x^2}{x^4-6x^3+7x^2+12x-18}$ l) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4+4x^3+4x^2}{x^4+4x^3+2x^2-8x-8}$

m) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^6+8x^5+23x^4+24x^3-8x^2-32x-16}{2x^6+13x^5+28x^4+15x^3-22x^2-28x-8}$

n) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^9-4x^8+5x^7+x^6-9x^5+9x^4-x^3-5x^2+4x-1}{x^8-5x^7+10x^6-10x^2+5x-1}$

Sol: a) 2; b) 2; c) 0; d) 3; e) 2; f) –7; g) 10/21; h) 0; i) 0; j) 4; k) 54/7; l) 2; m) 5/7; n) 0;

7º Demostrar que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} = \frac{m}{n}$$

Límites del número *e*:

Los límites del número *e* son del tipo de indeterminación 1^{∞}, la forma algebraica de resolverlos es haciendo que dichos límites se parezcan a algo como esto:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\frac{1}{e}$$

Ejercicios:

8º Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x}\right)^{\frac{3x+2}{5}}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2-2x}{3x}}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x-3}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+x}\right)^{x-3}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3+5x}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2+2x}\right)^{\frac{4x^2-1}{2x}}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x}\right)^{\frac{x^2}{2}}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x-4}$ l) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$

ll) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+2}\right)^{x}$ m) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2-2}\right)^{x+1}$ n) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{x+1}$

ñ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-2x}{3x^2+1}\right)^{15x}$ o) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-3x}\right)^{\frac{1}{x}}$ p) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-x}}\right)^{x}$

q) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}\right)^{x-2}$ r) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2x}{x^2-1}\right)^{\frac{3}{x^2}}$ s) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{\frac{x}{3}}$

t) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x+1]{\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2}}$ u) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x+2]{\left(\frac{x^2+1}{2+x^2}\right)^{x^2}}$ v) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{\frac{4x+1}{4x}}$

w) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[\frac{x+1}{x}]{\frac{3x^2-2x+1}{3x^2-1}}$ x) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[\frac{x-1}{x^2}]{\frac{4x^2+1}{x(4x+3)}}$ y) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2}{x^2-x}\right)^{x\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{x-1}}$

z) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\right)^{\frac{4-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}}$

Sol: a) e; b) $e^{12/5}$; c) e^2; d) $e^{1/3}$; e) e; f) e^3; g) $1/e$; h) e^5; i) $1/e$; j) 0; k) e; l) 1; ll) 1; m) $1/e$; n) e^{-3} ; ñ) e^{-10}; o) 1; p) $e^{1/2}$; q) e; r) 1; s) e; t) 1; u) 1; v) 1; w) 1; x) $e^{-3/4}$; y) e^{e}; z) e;

Método de aproximaciones pequeñas:

Todas las funciones es posible aproximarlas localmente, o globalmente, a una serie polinómica de potencias enteras. Dicha serie polinómica se denomina serie de Taylor. Las series de Taylor de las funciones más famosas son:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$a^x = 1 + x\ln a + \frac{(x\ln a)^2}{2!} + \frac{(x\ln a)^3}{3!} + \frac{(x\ln a)^4}{4!} + \dots$$

Que convergen en toda la recta real. Otras convergen en intervalos, como por ejemplo:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots \qquad -1 < x < 1$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{x^9}{9} + \dots$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \dots \right)$$

Y otras, que también convergen en intervalos, no existe relación ninguna entre los coeficientes de la serie de potencias.

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$$

Primeras aproximaciones pequeñas:

Si se da la circunstancia que $x \to 0$ o que x en radianes es muy pequeño, los términos de potencias altas de las series de Taylor se hacen tan pequeños que se vuelven despreciables frente a los términos de potencias más bajas, y en esta circunstancia observamos que:

$\sin x \approx x$ $\qquad$ $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$ $\qquad$ $e^x \approx 1 + x$ $\qquad$ $a^x \approx 1 + x\ln a$

$\log(1+x) \approx x$ $\qquad$ $\arcsin x \approx x$ $\qquad$ $\arccos x \approx \frac{\pi}{2} - x$

Ejercicios:

9º Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x + \sin x}$ $\qquad$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2}$

c) $\lim_{x\to 0} \operatorname{cosec} x - \frac{1}{x}$ $\qquad$ d) $\lim_{x\to 0} (\sin x)^x$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{(e^x - 1)^2}$ $\qquad$ f) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 3x + 2}$

Sol: a) 1/2; b) 1/6; c) 0; d) 1; e) 1/2; f) –1;

Segundas aproximaciones pequeñas:

En ocasiones se hace necesario utilizar las segundas aproximaciones pequeñas, pues al cancelarse las primeras, las segundas aproximaciones cobran mayor relevancia.

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} \qquad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \qquad e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} \qquad \log(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$$

$$a^x = 1 + x\ln a + \frac{(x\ln a)^2}{2} \qquad \arccos x \approx \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} \qquad \arcsin x \approx x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}$$

Son más raros los límites en que sea necesario usar terceras o sucesivas aproximaciones, en esos casos suele preferirse la utilización de la regla de L'Hopital.

Ejercicios:

10º Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 - x^2}{x^4}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - e^x + 1}{e^x - 1 - x}$

Sol: a) 1/6; b) 1/12; c) 2; d) 2; e) –1; f) –2;

Derivación con límites:

Definición: Dada una función $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$, con $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$, se define su derivada como:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Derivada de una constante:

$$\boxed{f(x) = k \to f'(x) = 0}$$

Aplicando la definición:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Ejemplo: $f(x) = 4$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4-4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Derivada de una variable por una constante:

$$\boxed{f(x) = ax \to f'(x) = a}$$

Aplicando la definición:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h) - ax}{h} = a\lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = a\lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = a$$

Ejemplo: $f(x) = x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Derivadas de una variable elevado a una potencia entera:

$$\boxed{f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = anx^{n-1}}$$

Aplicando la definición:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^n - x^n}{h} = a \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

Recordando ahora que:

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + c_1 x^{n-2}h^2 + c_2 x^{n-3}h^3 + \ldots + c_{n-3}h^{n-2}x^2 + nxh^{n-1} + h^n$$

Donde cada uno de los coeficientes c_i vienen del triangulo de Tartaglia o del binomio de Newton. Para el límite solo serán necesarios los primeros, los demás se anularan:

$$f'(x) = a\lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \ldots + h^n - x^n}{h} = a\lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \ldots + h^n}{h} =$$

$$f'(x) = a\lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \ldots + h^{n-1} = anx^{n-1}$$

Formula extensible también a potencias no enteras, aunque en dicho caso el procedimiento sería más complicado.

Ejemplo: $f(x) = 3x^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 3h^2 + 6hx - 3x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h^2 + 6hx}{h} = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{h\to 0} 3h + 6x = 6x$$

Derivada de una suma:

$$\boxed{f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u' + v'}$$

Aplicando la definición:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = u'(x) + v'(x)$$

Ejemplo: $f(x) = x^4 + 4$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 + 4 - x^4 - 4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{h\to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} = \lim_{h\to 0} 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 = 4x^3$$

Ejemplo: $f(x) = 3x^4 - x^3$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^4 - (x+h)^3 - 3x^4 + x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^4 - 3x^4}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \ldots$$

$$\ldots = 3\lim_{h\to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \ldots$$

$$= 3\lim_{h\to 0}\left(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3\right) - \lim_{h\to 0}\left(3x^2 + 3xh + h^2\right) = 12x^3 - 3x^2$$

Derivada de una función elevada a una potencia entera:

$$\boxed{f(x) = au^n \rightarrow f(x) = anu'u^{n-1}}$$

Aplicando la definición:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{au^n(x+h) - au^n(x)}{h} = a\lim_{h\to 0}\frac{\left(u(x+h)\right)^n - \left(u(x)\right)^n}{u(x+h)-u(x)}\cdot\frac{u(x+h)-u(x)}{h} = \dots$$

$$\dots = a\lim_{h\to 0}\frac{\left(u(x+h)\right)^n - \left(u(x)\right)^n}{u(x+h)-u(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} = au'(x)\lim_{h\to 0}\frac{\left(u(x+h)\right)^n - \left(u(x)\right)^n}{u(x+h)-u(x)} = \dots$$

y ejecutando un cambio de parámetro:

$$z = u(x+h) - u(x) \leftrightarrow u(x+h) = u(x) + z$$

y así como $h \to 0$ entonces $z \to 0$, con ello desembocamos en un caso deducido con anterioridad:

$$\dots = au'(x)\lim_{z\to 0}\frac{\left(u(x)+z\right)^n - \left(u(x)\right)^n}{z} = au'(x)\left(nu^{n-1}(x)\right) = anu'u^{n-1}$$

Ejemplo: $f(x) = (x-1)^3$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h-1)^3-(x-1)^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h-1)^3-(x-1)^3}{(x+h-1)-(x-1)}\cdot\frac{(x+h-1)-(x-1)}{h} = \dots$$

$$\dots = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h-1)^3-(x-1)^3}{(x+h-1)-(x-1)}\cdot\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h-1)^3-(x-1)^3}{(x+h-1)-(x-1)} = \dots$$

y ahora cambiamos de parámetro:

$$z = (x+h-1)-(x-1) \leftrightarrow (x+h-1) = (x-1)+z$$

y como $h \to 0$ entonces $z \to 0$, por tanto el límite:

$$\dots = \lim_{z\to 0}\frac{(x-1+z)^3-(x-1)^3}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{(x-1)^3+3(x-1)^2z+3(x-1)z^2+z^3-(x-1)^3}{z} = \dots$$

$$\dots = \lim_{z\to 0} 3(x-1)^2 + 3(x-1)z + z^2 = 3(x-1)^2$$

Ejemplo: $f(x) = \left(x^2+1\right)^3$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\left((x+h)^2+1\right)^3 - \left(x^2+1\right)^3}{h} = \dots$$

$$\dots = \lim_{h\to 0}\frac{\left((x+h)^2+1\right)^3 - \left(x^2+1\right)^3}{(x+h)^2+1-(x^2+1)}\cdot\frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h} = \dots$$

$$\dots = \lim_{h\to 0}\frac{\left((x+h)^2+1\right)^3 - \left(x^2+1\right)^3}{(x+h)^2+1-(x^2+1)}\cdot\frac{2hx+h^2+h}{h} = 2x\lim_{h\to 0}\frac{\left((x+h)^2+1\right)^3 - \left(x^2+1\right)^3}{(x+h)^2+1-(x^2+1)} = \dots$$

Cambiamos de variable:

$$z = (x+h)^2+1-(x^2+1) \leftrightarrow (x+h)^2+1 = (x^2+1)+z$$

y como $h \to 0$ entonces $z \to 0$, luego:

$$= 2x\lim_{z\to 0}\left(\frac{\left((x^2+x)+z\right)^3 - \left(x^2+x\right)^3}{z}\right) = 2x\lim_{z\to 0}\left(\frac{\left((x^2+x)+z\right)^3 - \left(x^2+x\right)^3}{z}\right) = \dots$$

Cambiamos nuevamente de variable mediante $w = (x^2 + x)$:

$$\ldots = \lim_{z\to 0}\left(\frac{(w+z)^3 - w^3}{z}\right)\cdot(2x+1) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{w^3 + 3w^2z + 3wz^2 + z^3 - w^3}{z}\right)\cdot(2x+1) = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{z\to 0}\left(3w^2 + 3wz + z^2\right)\cdot(2x+1) = 3w^2\cdot(2x+1) = 3(2x+1)(x^2+x)^2$$

<u>Derivada de un producto:</u>

$$\boxed{f(x) = uv \to f'(x) = u'v + v'u}$$

Aplicando la definición:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = \ldots$$

Creamos dos términos, contrarios y que se anularían entre si, para así lograr la demostración:

$$\ldots = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{h\to 0}v(x+h)\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x)\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h) - v(x)}{h} = vu' + uv'$$

Ejemplos: $f(x) = x^2(x+1)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2(x+h+1) - x^2(x+1)}{h} = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2(x+h+1) - (x+h)^2(x+1) + (x+h)^2(x+1) - x^2(x+1)}{h} = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2(x+h+1) - (x+h)^2(x+1)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2(x+1) - x^2(x+1)}{h} = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{h\to 0}\left((x+h)^2\,\frac{(x+h+1) - (x+1)}{h}\right) + (x+1)\lim_{h\to 0}\left(\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}\right) = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{h\to 0}\left((x+h)^2\,\frac{h}{h}\right) + (x+1)\lim_{h\to 0}\left(\frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h}\right) = \ldots$$

$$\ldots = x^2 + (x+1)\lim_{h\to 0}\left(\frac{2hx + h^2}{h}\right) = 2x(x+1) + x^2$$