PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

De cada problema se da el enunciado, el planteamiento, se indica la función a optimizar y finalmente se da la solución. Deberán realizarse los cálculos que justifiquen los resultados.

Problema 1

E. *Entre todos los rectángulos de perímetro dado, encontrar el que tiene área máxima.*

P. Si se llaman *x* e *y* a los lados del rectángulo y *p* al perímetro dado, se cumple que $2x+2y=p$.

El área del rectángulo es $A=xy$ y la función a optimizar es $A=-x^2+\frac{p}{2}x$.

S. Es un cuadrado de lados $x=y=\frac{p}{4}$ y el área es $A=\frac{p^2}{16}$.

Problema 2

E. *Entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa dada, hallar el que tenga área máxima.*

P. Si se llaman *x* e *y* a los catetos y *z* a la hipotenusa dada, se cumple que $x^2+y^2=z^2$.

El área del triángulo es $A=\frac{xy}{2}$ y la función a optimizar es $A=\frac{1}{2}\sqrt{z^2x^2-x^4}$.

S. Es un triángulo isósceles de catetos $x=y=\frac{z}{\sqrt{2}}$ y el área es $A=\frac{z^2}{4}$.

Problema 3

E. *Se tiene un alambre de longitud L y se desea dividirlo en dos trozos para formar con cada uno de ellos un triángulo equilátero. Hallar la longitud de cada trozo para que la suma de las áreas de los dos triángulos sea mínima.*

P. Si un trozo de alambre mide *x*, el otro medirá *L-x*.

El área de un triángulo equilátero en función de un lado *a* es $A=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

La función a optimizar es $A=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{L-x}{3}\right)^2\right]$

S. Los dos triángulos son iguales de lado $x=L-x=\frac{L}{2}$ y el área es $A=\frac{\sqrt{3}L^2}{72}$

Problema 4

E. *De una lámina cuadrada de cartón de lado L se debe cortar de en cada esquina un cuadrado, de modo que con el cartón resultante, doblando convenientemente, se pueda construir una caja sin tapa. Determinar la longitud del lado del cuadrado de las esquinas para que la capacidad de la caja sea máxima.*

P. Si *x* es el lado de cada cuadrado de la esquina de la lámina de cartón de lado *L*, el volumen de la caja a optimizar es $V=(L-2x)^2x$.

S. El cuadrado de las esquinas tiene de lado $x=\frac{L}{6}$ y el volumen es $V=\frac{2L^3}{27}$.

Problema 5

E. *Una ventana está formada por un rectángulo rematado con un semicírculo en la parte superior. Si el marco ha de tener una longitud p, determinar sus dimensiones para que la superficie de la ventana sea máxima.*

P. Si D es el diámetro de la semicircunferencia y *x* la altura del rectángulo se cumple $\pi\frac{D}{2}+2x+D=p$.

El área es $A=\pi\frac{D^2}{8}+Dx$ y la función a optimizar es $A=-\frac{\pi+4}{8}D^2+\frac{p}{2}D$.

S. El diámetro $D=\frac{2p}{4+\pi}$ es el doble que la altura del rectángulo $x=\frac{p}{4+\pi}$ y el área es $A=\frac{p^2}{2(4+\pi)}$.

Problema 6

E. *Dos rectas se cortan perpendicularmente. Por cada una avanzan, simultáneamente dos móviles con velocidades v_A y v_B. Se dirigen al punto de corte de las rectas partiendo de unas distancias a y b respectivamente. Hallar el instante en que la distancia entre los móviles es mínima.*

P. Las ecuaciones del movimiento de cada móv¡l son: $e_A=a-v_At$ y $e_B=b-v_Bt$.
La función a optimizar es $d=\sqrt{(a-v_At)^2+(b-v_Bt)^2}$.

S. La distancia mínima se produce en el instante $t=\frac{av_A+bv_B}{{v_A}^2+{v_B}^2}$

- Se pueden plantear y resolver los problemas, en una primera fase, para valores concretos de los parámetros y verificar la solución obtenida sustituyendo en las fórmulas correspondientes.