Problemas de Matemáticas II
para 2^{o} de Bachillerato

Pedro González Ruiz
Catedrático de Matemáticas

Versión XX: septiembre de 2012

Índice general

Parte I

Análisis Matemático

Capítulo 1

Límites y Funciones continuas

1. Dada la función:
$$f(x) = \frac{x^2 - x}{\operatorname{sen}(\pi x)}, \quad x \in]0, 1[$$
Definir $f(0)$ y $f(1)$ de forma que f sea continua en todo el intervalo cerrado $[0, 1]$.
<u>Solución</u>: $f(0) = f(1) = -\frac{1}{\pi}$

2. Estudiar la continuidad de la función:
$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{si } x = 0 \\ 5 - \dfrac{|x|}{x}, & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$
<u>Solución</u>: f es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en $x_0 = 0$, donde tiene una discontinuidad de salto, siendo salto $(f, 0) = 2$.

3. Estudiar la continuidad de la función
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{x-2}{1 + e^{\frac{1}{x-2}}}, & \text{si } x \neq 2 \end{cases}$$
en el punto $x_0 = 2$.
<u>Solución</u>: f es continua en $x_0 = 2$.

4. Demostrar que la función $f(x) = x(1 + \operatorname{sen} x)$ toma el valor 2, es decir, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_0(1 + \operatorname{sen} x_0) = 2$.

5. Se dice que una raíz de una ecuación está separada cuando se ha encontrado un intervalo en el que la ecuación tiene una única raíz. Separar con ayuda del teorema de Bolzano, las raíces de las ecuaciones:
$$2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0 \quad ; \quad 2x^4 - 13x^2 + 15 = 0$$

6. Para las siguientes funciones polinómicas, se pide hallar dos enteros consecutivos n y $n+1$ tales que f tenga una raiz entre n y $n+1$:
$$f(x) = 2x^3 + x - 1$$
$$f(x) = x^4 - 3x^2 + x + 1$$
$$f(x) = x^5 - 4x^3 - 1$$

7. Probar que existe un número x tal que:

$$2x - 1 = \cos x$$

8. Aplicando el Teorema de Bolzano, demostrar que la ecuación:

$$x^3 + x - 3 = 0$$

   tiene una raíz comprendida entre 1 y 2.

9. Dada la ecuación $x^3 + 5x^2 - 10 = 0$, encontrar tres intervalos cerrados de modo que en el interior de cada uno de ellos haya una raíz de la ecuación.

10. Para las siguientes funciones, calcular los puntos en que alcanzan el máximo y el mínimo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x-1}, \quad \text{con } x \in [2,5] \\ g(x) &= |1 - |x||, \quad \text{con } x \in [-2,2] \\ h(x) &= x^2 - 1, \quad \text{con } x \in [-1,1] \end{aligned}$$

    <u>Solución</u>:

    - El mínimo se alcanza en $x = 5$. El máximo se alcanza en $x = 2$.
    - El mínimo se alcanza en $x = -1, 1$. El máximo se alcanza en $x = 0, 2, -2$.
    - El mínimo se alcanza en $x = 0$. El máximo se alcanza en $x = -1, 1$.

11. Hallar a y b de modo que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1)^2, & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(b + x), & \text{si } 0 < x < \pi \\ \dfrac{\pi}{x}, & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

    <u>Solución</u>: $a = -1$, $b = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

12. Demostrar que la ecuación:

$$2x^3 - 6x + 1 = 0$$

    tiene una *única solución* real en el intervalo $]0, 1[$. Enunciar los teoremas utilizados en el razonamiento.

13. La función $f(x) = \operatorname{tg} x$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ y sin embargo no se anula en él. ¿Contradice este ejemplo el teorema de Bolzano?.

14. La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo cerrado $[-2, 2]$, y sin embargo, no se anula en él. Explicar esta aparente contradicción con el Teorema de Bolzano.

15. Comprobar que la función $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6, & \text{si } x \leq 2 \\ 2x^3 + 3x - 26, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

es continua en el intervalo $[-3, 3]$ y encontrar los valores máximo y mínimo de la función $f(x)$ en dicho intervalo.

Solución: El valor máximo de f se alcanza en $x = 3$ y vale 37. El valor mínimo de f se alcanza en $x = \frac{1}{2}$ y vale $-\frac{25}{4}$.

16. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

en el intervalo $[-1, 1]$. ¿Se cumple el Teorema de Bolzano?. Razonar la respuesta.

Solución: f no es continua en $x = 0$. No se cumple.

17. Estudiar el dominio y la continuidad de la función:

$$y = f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x^2}\right)$$

Solución: $\mathcal{D}(f) =]-2, +\infty[- \{0\}$, f es continua en $\mathcal{D}(f)$.

18. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2}$$

a) Determinar su dominio.

b) ¿Se podría asignar a $f(x)$ algún valor en los puntos de discontinuidad para que fuera continua en $[0, +\infty[$?

Solución: $\mathcal{D}(f) =]0, +\infty[$, $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$

19. Probar que la función:

$$f(x) = \frac{6}{2 + \operatorname{sen} x}$$

alcanza el valor 4 en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

20. Para la función $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$, ¿Podemos afirmar que existe $c \in [0, 1]$ verificando $f(c) = 0$?. Calcula dicho valor c.

Solución: No. $c = \frac{1}{2}$

21. Sea:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x, & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcular a, b para que f sea continua.

Solución: $b = 0$, a cualquier número real.

22. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

Solución: f es continua en todo $\mathbb{R}$.

23. Probar que la función f definida por:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$$

no es continua en $x = 1$. Indicar qué tipo de discontinuidad presenta en dicho punto.

Solución: evitable.

24. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, donde $\lfloor x \rfloor$ designa la parte entera de x, es decir, el mayor entero $\leq x$. Representar también dicha función.

Solución: f es continua en $x_0 \Longleftrightarrow x_0$ no es entero.

25. Estudiar la continuidad de la función f definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{e^x+1}, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Solución: f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

26. Determinar los números reales a y b para que la función f definida como:

$$f(x) = \begin{cases} ae^{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}} + b\cos x, & \text{si } x < 0 \\ 6, & \text{si } x = 0 \\ 3a\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + b(x-1), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

sea continua en toda la recta real.

Solución: $a = 3$, $b = 3$.

27. ¿Se puede afirmar que la función $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 1$ corta al eje de abscisas en al menos un punto del intervalo $]-1, 0[$?. ¿Y del $]0, 1[$?.

Solución: No. Sí.

28. Probar que las gráficas de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto y localizarlo aproximadamente.

29. Probar que la ecuación:

$$x^3 + ax^2 + bc + c = 0$$

tiene siempre solución real. ¿Es también esto cierto para la ecuación:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0?.$$

30. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x}, & \text{si } x < 3 \\ 13 - x^2, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Dibujar la gráfica de la función en un entorno del punto $x = 3$.

Solución: f es discontinua en el punto $x = 3$, donde presenta un salto de longitud 4. En los demás puntos es continua.

31. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \operatorname{sen} x, & \text{si } x < \pi/4 \\ 1 + 2\cos x, & \text{si } x \geq \pi/4 \end{cases}$$

Solución: f es discontinua en el punto $x = \frac{\pi}{4}$, donde presenta un salto de longitud $\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$. En los demás puntos es continua.

32. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 + k}$$

según los diferentes valores del parámetro real k.

Solución: Si $k > 0$, f es continua en todo $\mathbb{R}$. Si $k \leq 0$, f tiene discontinuidades asintóticas en $x = \pm\sqrt{-k}$; en los demás puntos es continua.

33. Hallar los valores a y b de forma que sea aplicable el teorema de Bolzano a la función

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ a + x^2, & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{b}{x}, & \text{si } 1 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

en el intervalo $[-\pi, \pi]$, calculando el punto del interior c al que hace mención dicho teorema.

Solución: $a = 1$, $b = 2$, $c = -\frac{\pi}{2}$.

34. Demostrar que si f es una función que está acotada en un entorno de un punto x_0 y si g es otra función tal que:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$$

Como aplicación de lo anterior, estudiar la continuidad de la función

$$h(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \text{ en el punto } x_0 = 0$$

Solución: h es continua en $x_0 = 0$ definiendo $h(0) = 0$.

35. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x}, & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad en el punto $x_0 = 0$.

<u>Solución</u>: f tiene un salto en $x_0 = 0$, y la longitud del salto es 2.

36. Demostrar que todo número real positivo tiene una única raiz n-ésima positiva.

37. Sea $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que existe:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Demostrar que la función f está acotada en todo el intervalo $[a, +\infty[$.

38. Se considera la función:

$$f(x) = 3 + (x+1) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

que no tiene sentido para $x = -1$. Determinar el valor de $f(-1)$ para que la función sea continua en $x = -1$.

<u>Solución</u>: $f(-1) = 3$

Capítulo 2

Funciones derivables

2.1. Reglas de derivación

1. Si $\lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda' = 0$, es decir la derivada de una constante es cero.
2. $[x^n]' = nx^{n-1}$.
3. **Derivadas de suma, producto y cociente**. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ una constante:

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x) \qquad ; \qquad \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{((g(x))^2}$$

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \qquad ; \qquad \left[\frac{f(x)}{\lambda}\right]' = \frac{f'(x)}{\lambda}$$

$$[\lambda\cdot f(x)]' = \lambda f'(x) \qquad ; \qquad \left[\frac{\lambda}{f(x)}\right]' = \frac{-\lambda f'(x)}{(f(x))^2}$$

4. **Derivadas de potencia y raíz**. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\left[f(x)^\lambda\right]' = \lambda\,[f(x)]^{\lambda-1}\,f'(x) \qquad ; \qquad \left[\sqrt[n]{f(x)}\right]' = \frac{f'(x)}{n\,\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}}}$$

5. **Derivadas de exponenciales y logaritmos**. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $a \neq 1$. Entonces:

$$(a^{f(x)})' = f'(x)\,a^{f(x)}\cdot \ln a \qquad ; \qquad (\log_a\, f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\frac{1}{\ln a}$$

$$(e^{f(x)})' = f'(x)\,e^{f(x)} \qquad ; \qquad (\ln\, f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$(e^x)' = e^x \qquad ; \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

6. **Derivadas de funciones trigonométricas**.

$$\big(\operatorname{sen} f(x)\big)' = f'(x)\cos f(x) \quad ; \quad (\operatorname{sen} x)' = \cos x$$

$$\big(\cos f(x)\big)' = -f'(x)\operatorname{sen} f(x) \quad ; \quad (\cos x)' = -\operatorname{sen} x$$

$$\big(\operatorname{tg} f(x)\big)' = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = f'(x)\big(1+\operatorname{tg}^2 f(x)\big) \quad ; \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\operatorname{tg}^2 x$$

$$\big(\operatorname{arc\,sen} f(x)\big)' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \quad ; \quad (\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\big(\operatorname{arc\,cos} f(x)\big)' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \quad ; \quad (\operatorname{arc\,cos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\big(\operatorname{arc\,tg} f(x)\big)' = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} \quad ; \quad (\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Nota: Los problemas marcados con un asterisco ($\star$), significan que parte de la solución, generalmente un gráfico, está detallada en el archivo `graficos.pdf`.

2.2. Concepto de derivada

1. Calcular, aplicando la definición de derivada:

   - $f'(2)$, siendo $f(x) = 3x^2 - 1$
   - $f'(-2)$, siendo $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

   Solución: 12, $\dfrac{1}{4}$.

2. Determinar el dominio y la expresión de la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

   a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función cuya gráfica es la recta que pasa por los puntos $P(0,5)$ y $Q(5,0)$.

   b) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x|x+1|$.

   Solución: $f'(x) = -1$, $\mathfrak{D}(f') = \mathbb{R}$; $g'(x) = \begin{cases} -2x-1, & \text{si } x < -1 \\ 2x+1, & \text{si } x > -1 \end{cases}$, $\mathfrak{D}(g') = \mathbb{R} - \{-1\}$

3. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c, & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   es derivable en $x = 0$. ¿Cuánto valen b y c?.

   Solución: $b = -\frac{1}{2}$, $c = 1$.

4. Se sabe que la función $f : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2, & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ c + \sqrt{x-1}, & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

   es derivable en el intervalo $]0,5[$ y verifica $f(0) = f(5)$. Calcular a, b, c.

   Solución: $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -2$.

5. Demostrar que todas las derivadas de orden par de la función:

$$f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$$

   son nulas en el origen.

6. ($\star$)Consideremos la función:

$$f(x) = |x^2 - 4|$$

   a) Razonar en qué puntos es derivable y en cuáles no lo es.

b) Estudiar la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos.

c) Representar gráficamente la función.

Solución:

a) No es derivable en $x = \pm 2$.

b) Tiene un máximo relativo en $x = 0$. Mínimos absolutos y relativos en los puntos $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.

7. ($\star$)Dibujar la función $f(x) = x|x|$ y hallar $f'(x)$ y $f''(x)$.

   Solución: $f'(x) = 2|x|$, $f''(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x > 0 \\ -2, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

8. ($\star$)Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = |1 - |x||$$

   y representarla gráficamente.

   Solución: f es continua para todo $x \in \mathbb{R}$ y f es derivable para todo $x \in \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$.

9. ($\star$)Idem para la función:

$$f(x) = x^2 + 2x - |x|$$

   Solución: f es continua para todo $x \in \mathbb{R}$ y f es derivable para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

2.3. Aplicaciones geométricas de la derivada

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 4x + 3$ en el punto $x_0 = 4$.

   Solución: $4x - y - 13 = 0$.

2. Hallar la pendiente de la parábola $y = x^2 - 7x + 12$ en $x_0 = 2$. ¿En qué punto será la pendiente 3?. ¿Y -1?. ¿Y 0?.

   Solución: -3, $(5, 2)$, $(3, 0)$, $\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

3. Si desplazamos la gráfica de la parábola anterior hacia arriba, ¿cambiará el valor de la derivada para los valores de x_0 propuestos?. ¿Qué influencia tiene en la derivada el término independiente?.

   Solución: No; Ninguna.

4. ¿En qué punto la curva de ecuación $y = 3x^2 - 5x + 1$ tendrá una recta tangente paralela a la recta de ecuación $y = 7x - 3$?.

   Solución: $(2, 3)$.

5. Hallar el valor de a para que la curva $y = 2x^3 - 3x^2 + a$ y la recta $y = 12x - 1$ sean tangentes. ¿Cuál es el punto de tangencia?.

   Solución: Dos soluciones: $a = -8, P(-1, -13)$; $a = 19, P(2, 23)$.

6. Hallar un punto de la curva $y = +\sqrt{36-4x^2}$ en el cual la recta tangente sea paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.

   Solución: $\left(3\dfrac{\sqrt{5}}{5}, 12\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

7. Hallar la ecuación de la recta normal a la hipérbola $y = \dfrac{1}{x}$ en el punto $(1,1)$. Repetir para el punto $(-1,-1)$. Interpretar el resultado.

   Solución: $y = x$, $y = x$. Es la misma.

8. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & \text{si } x \leq 1 \\ 5x^2 - 10x + 7, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   - Demostrar que f es derivable en $x_0 = 1$ y calcular $f'(1)$.
   - Encontrar la función derivada $f'(x)$.
   - Hallar las rectas tangente y normal a la curva en $x_0 = 1$.
   - Probar que f' no es derivable en $x_0 = 1$, es decir, no existe $f''(1)$.

   Solución: $f'(1) = 0$, $f'(x) = \begin{cases} 2x-2, & \text{si } x \leq 1 \\ 10x-10, & \text{si } x > 1 \end{cases}$, tangente $\equiv y = 2$, normal $\equiv x = 1$.

9. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,2)$ y por el punto $B(3,n)$, siendo n el valor de la derivada de la función $y = 3x^2 - 6x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

   Solución: $x + y - 3 = 0$.

10. Hallar la ecuación de la tangente y de la normal a la curva $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x}{3} + 1$ en el punto de abscisa $x = 2$.

    Solución: $7x - 3y - 5 = 0$, $3x + 7y - 27 = 0$.

11. Determinar m con la condición de que la pendiente de la curva:

$$y = \frac{mx+1}{2x+m}$$

    en $x = 1$ sea -1.

    Solución: $m = -1$.

12. Hallar m para que la tangente a la curva $y = +\sqrt{25-x^2}$ en el punto de abscisa $x = 4$ sea perpendicular a la recta $y = mx$.

    Solución: $m = \dfrac{3}{4}$.

13. Determinar en qué puntos de la curva $y = \dfrac{x}{1-x^2}$ la tangente tiene una inclinación de $45°$.

    Solución: $x = 0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.

14. ¿En qué puntos de la curva $y = x^3 - 3x^2$, la tangente es paralela al eje de abscisas?. ¿Y en qué puntos forma la tangente un ángulo de 45° con el eje de ordenadas?.

    Solución: $(0,0)$, $(2,-4)$, $\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}, -2-\frac{10\sqrt{3}}{9}\right)$, $\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -2+\frac{10\sqrt{3}}{9}\right)$

15. La recta de ecuación $y = 6x + a$ es tangente a la curva $y = \frac{bx-1}{bx+1}$ en el punto $x_0 = 0$. Calcular a y b.

    Solución: $a = -1$, $b = 3$.

16. Hallar el punto de la curva:
    $$y = \ln x - \frac{x}{e} - x$$
    en el que la tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante. Hallar la tangente y la normal en dicho punto.

    Solución: $(e, -e)$, $x + y = 0$, $x - y - 2e = 0$.

17. Hallar el punto o puntos de la gráfica de la función $y = x \cdot \ln x$ en el que la tangente forma un ángulo de 45° con el semieje de abscisas positivo.

    Solución: $(1, 0)$

18. Dada la función $y = \sqrt{x^2 + 4x + 1}$, hallar los puntos en los que la tangente es paralela a la recta $2x + y + 2 = 0$.

    Solución: $(-4, 1)$

19. ¿En qué puntos la curva $y = x^3 - 2x^2 - 6x$ tiene una pendiente de -2?.

    Solución: $(2, -12)$, $\left(-\frac{2}{3}, \frac{76}{27}\right)$.

20. Hallar la pendiente de la curva:
    $$y = \frac{x+1}{x^2 + 5x - 6}$$
    en su punto de corte con el eje de ordenadas.

    Solución: $-\frac{11}{36}$

21. Hallar el punto de la curva:
    $$y = \ln(1 + x^2)$$
    en el que la tangente es perpendicular a la tangente trazada por el punto de abscisa $x = 1$.

    Solución: $(-1, \ln 2)$.

22. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, hallar los coeficientes a, b, c, d sabiendo que la ecuación de la tangente a la curva en el punto de inflexión $(1, 0)$ es $y = -3x + 3$ y que la función presenta un extremo en el punto de abscisa $x = 0$.

    Solución: $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$, $d = 2$.

23. Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2 + 2$ en su punto de inflexión.

    Solución: $y = -3(x - 1)$

24. Probar que la recta $y = -x$ es tangente a la gráfica de la función:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$$

Hallar el punto de tangencia y estudiar si esta tangente corta a la gráfica en algún punto distinto del punto de tangencia.

Solución: $(3, -3)$. Sí, en el punto $(0, 0)$.

25. Dibujar la gráfica de la función $f(x) = x - x^3$ y hallar la tangente en el punto de abscisa 1. Por el punto $(1, 0)$ pasa otra recta que es tangente a la gráfica en un punto (c, d) distinto del $(1, 0)$. Hallar el punto (c, d) y la recta tangente.

Solución: $y = -2(x - 1)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}\right)$, $x - 4y - 1 = 0$

26. Dada la curva:

$$f(x) = \frac{2}{x} + \ln(x^2)$$

a) Buscar el punto M de la curva en el que la tangente es paralela al eje de abscisas.

b) Buscar el punto de inflexión I.

c) Calcular el área del triángulo que tiene por vértices los puntos M, I y la intersección J de las tangentes a la curva en los puntos M e I.

Solución: $M(1, 2)$, $I(2, 1 + 2\ln 2)$, $S = \frac{(3-4\ln 2)(2\ln 2-1)}{2}$.

27. Se considera la curva de ecuación:

$$y = f(x) = e^{x^2+hx} - 1$$

Determinar h para que la tangente en el origen sea la bisectriz del primer cuadrante.

Solución: $h = 1$

28. Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva

$$y = \frac{2x}{1 - x^2}, \quad \text{para } x > 1$$

En el punto $x = 2$, la abandona y sigue desplazándose a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

a) Hallar la ecuación de la recta tangente.

b) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, encontrar el punto en el que la partícula encuentra al eje OX.

c) Si el desplazamiento es de derecha a izquierda, encontrar el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto P.

Solución: $10x - 9y - 32 = 0$; $(16/5, 0)$; $(1, -22/9)$.

29. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 + 2x + 4$. Determinar los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a ésta pasa por el origen de coordenadas y hallar las ecuaciones de dichas tangentes.

Solución: $(2, 12)$, tangente $\equiv y = 6x$; $(-2, 4)$, tangente $\equiv y = -2x$

30. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Calcular a, b, c, d sabiendo que la gráfica de f tiene un punto de inflexión en $Q(-1, 3)$ y que la tangente a dicha gráfica en el punto $M(0, 1)$ es horizontal.

Solución: $a = 1$, $b = 3$, $c = 0$, $d = 1$.

31. Las curvas

$$\begin{aligned} y &= f(x) = 2x^2 + 2x - 3 \\ y &= g(x) = x^3 - 2x + 5 \end{aligned}$$

tienen un punto común P y una tangente común r en dicho punto. Hallar P y r.

Solución: $P(2, 9)$, $r \equiv y = 10x - 11$

2.4. Extremos, crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad

1. La población de una colonia de aves evoluciona con el tiempo t, medido en años, según la función $P : [2, 12] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$P(t) = \begin{cases} 10 + (t-6)^2, & \text{si } 2 \leq t \leq 10 \\ 28 - 2^{t-9}, & \text{si } 10 < t \leq 12 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente la función P e indicar en qué períodos de tiempo crece o decrece la población.

b) Indicar los instantes en los que la población alcanza los valores máximo y mínimo.

c) Si la población evolucionara a partir de $t = 12$ con la misma función que para $10 < t \leq 12$, ¿llegaría a extinguirse?. Justificar la respuesta, dando, en caso afirmativo, el instante de la extinción.

Solución: P decrece en $[2, 6[\cup]10, 12]$ y crece en $]6, 10[$. Mínimo en $t = 6$. Máximo en $t = 10$. La población se extingue a los $t = 9 + \frac{\log 28}{\log 2} = 13'80$ años.

2. Sea $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \ln x$

a) Probar que la función derivada f' es decreciente en todo su dominio.

b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

Solución: g crece en $]0, e[$ y decrece en $]e, +\infty[$.

3. Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

Solución: f crece en $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ y decrece en $]0, 2[$.

4. Hallar el dominio de la función:

$$f(x) = \ln\left[(x-1)(x-2)\right]$$

y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución: $\mathfrak{D}(f) =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$, f decrece en $]-\infty, 1[$ y crece en $]2, +\infty[$.

5. Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = (x-1)e^x$$

Solución: f decrece en $]-\infty, 0[$, y crece en $]0, +\infty[$.

6. Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones:

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$$
$$y = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$$

Solución:

a) f crece en $]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$ y decrece en $]2, 4[$.

b) f crece en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ y decrece en $]-1, 1[$.

7. Estudiar la convexidad y concavidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Solución: f es convexa en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ y cóncava en $]-1, 1[$.

8. Hallar los valores de m para que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + mx^2 + 3x - 2$$

sea convexa para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución: $m \geq 6$

9. Estudiar la concavidad y convexidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + x + 1$$

según los valores de a.

Solución: Si $a \geq \frac{3}{2}$, f es convexa para todo $x \in \mathbb{R}$. Si $a < \frac{3}{2}$, entonces f es convexa en $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$ y cóncava en $]x_1, x_2[$, donde $x_1 = \frac{-3-\sqrt{9-6a}}{6}$, $x_2 = \frac{-3+\sqrt{9-6a}}{6}$.

10. Hallar el punto P de la gráfica de la función f definida para $x \geq -3$ por $f(x) = \sqrt{2x+6}$ que está más próximo al origen de coordenadas. Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en P.

Solución: $P(-1, 2)$, $y = \frac{x+5}{2}$.

2.5. Raíces de ecuaciones

1. Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + b = 0$ tiene como máximo una raíz en el intervalo $[-1, 1]$. ¿Para qué valores de b hay exactamente una raíz de dicha ecuación en dicho intervalo?.

   Solución: Hay una única raíz cuando $|b| \leq 2$.

2. Demostrar que la ecuación:
   $$\frac{x^2}{2} - \ln(x-1)^2 = \frac{5}{2}$$
   tiene una única solución en $]2, 1+e[$.

3. Demostrar que la ecuación $2x^3 - 6x + 1 = 0$ tiene una única solución en el intervalo $]0, 1[$. Enunciar los teoremas utilizados en el razonamiento.

4. Demostrar que la ecuación $e^x = x + 1$ tiene una única solución.

5. Demostrar que la ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ tiene exactamente dos soluciones.

6. Demostrar que la ecuación $2x^2 = x(\operatorname{sen} x + \cos x) + \cos x - \operatorname{sen} x$ tiene exactamente dos soluciones.

7. Demostrar que la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x - 13 = 0$ tiene una única solución.

8. Demostrar que la función:
   $$f(x) = \frac{1}{2^x} - x$$
   tiene una única raíz real x_0 y calcular su parte entera.

   Solución: $\lfloor x_0 \rfloor = 0$

9. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $3 \ln x = x$?.

   Solución: Dos.

2.6. Teoremas de Rolle y del valor medio

1. Consideremos la función:
   $$f(x) = \begin{cases} ax - 3, & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - b, & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$
   Determinar a, b para que f cumpla las hipótesis del **Teorema de Lagrange** en el intervalo $[2, 6]$, y calcular el o los valores intermedios vaticinados por dicho teorema.

   Solución: $a = 2$, $b = 19$; $c = \frac{9}{2}$.

2. Comprobar que la función $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ cumple las condiciones del **Teorema de Rolle** en el intervalo $[-1, 3]$, y que efectivamente verifica dicho teorema.

3. ¿Se puede aplicar el **Teorema de Rolle** a la función $f(x) = |\cos x|$ en el intervalo $[0, \pi]$?. Razonar la respuesta.

   Solución: No, f no es derivable en $x_0 = \frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$.

4. ¿Se puede aplicar el **Teorema de Rolle** a la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ en el intervalo $[-3, 5]$?. Justificar la respuesta.

   Solución: No, f no es derivable en $x_0 = 1 \in [-3, 5]$.

5. La función:
$$f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$$
   se anula en los extremos del intervalo $[-1, 1]$. Demostrar que la derivada de esta función no se anula en ningún punto de dicho intervalo. ¿Contradice este resultado el **Teorema de Rolle**?. Explicar el por qué.

6. Dada la función:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ \dfrac{x^2-3}{2}, & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$
   Probar que f satisface las hipótesis del **Teorema del valor medio** y calcular el o los valores intermedios vaticinados por dicho teorema.

   Solución: $c = -\sqrt{2}, -\frac{1}{2}$.

7. Empleando el teorema del valor medio, hallar una cota superior del error que se comete al considerar que $\sqrt[5]{34} = 2$.

8. Comprobar que a la función $f(x) = x^2 + 2x$ le es aplicable el **Teorema del valor medio** en $[1, 3]$ y encontrar los puntos en los que se cumple el teorema.

   Solución: $c = 2$.

9. Averiguar si es aplicable el **Teorema del valor medio** a la función $f(x) = 2x + \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$ y en caso afirmativo encontrar los puntos en los que se verifica.

   Solución: $c = \frac{\pi}{2}$.

10. Aplicar el **Teorema de Rolle** a la función:
$$f(x) = x^2 - 6x$$
    escogiendo convenientemente el intervalo $[a, b]$.

11. Hallar las constantes a, b, c para que la función:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & \text{si } x < 2 \\ bx + c, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$
    cumpla las hipótesis del **Teorema de Rolle** en el intervalo $[0, 4]$.

    Solución: $a = -3$, $b = 1$, $c = -4$

2.7. Cálculo de límites

1. Determinar a sabiendo que existe y es finito el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} + ax}{x - \operatorname{sen} x}$$

   Calcular dicho límite.

   Solución: $a = -2$, límite $= 2$

2. Siendo $\ln x$ el logaritmo neperiano de x, calcular

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

   Solución: $\frac{1}{2}$

3. Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)\operatorname{sen} x}{x^3 - x^2}$$

   Solución: -1

4. Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} x^2 e^{-3x}$$

   Solución: $\frac{1}{2}$, 0

5. Hallar a para que:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x \right) = 2$$

   Solución: $a = 4$

6. Enunciar la Regla de L'Höpital. Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$

   Solución: $\frac{1}{3}$

7. **Selectividad Septiembre 2000**. Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg}(x^2)}$$

   Solución: 1.

8. **Selectividad Septiembre 2003**. Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \operatorname{sen} x}{x \cdot \operatorname{sen} x}$$

   siendo $\ln(1+x)$ el logaritmo neperiano de $1+x$.

   Solución: $-\frac{1}{2}$.

9. **Selectividad junio 2009**. Calcular el siguiente límite (ln denota logaritmo neperiano):

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{x^2-1}\right)$$

Solución: 1.

10. Calcular los siguientes límites:

[1] $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 6x}{12x}$ [2] $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{sen} x+\cos x}{\operatorname{sen} 2x-\cos x}$

[3] $\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x-x^2}{5x^2}$ [4] $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\operatorname{sen} x}{\ln(x^2)}$

[5] $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{3x-\operatorname{sen} 3x}$ [6] $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\operatorname{tg} x$

[7] $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2}{2\cos x-1}$ [8] $\lim_{x\to k}\left(4-\frac{3x}{k}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2k}\right)}$

[9] $\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{1/(1-\ln x)}$ [10] $\lim_{x\to\pi}\frac{\ln\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)}{(x-\pi)^2}$

[11] $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\operatorname{ctg} x}{5\cos 2x}$ [12] $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

[13] $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{\operatorname{sen} 2x}}{3x-\operatorname{sen} 3x}$ [14] $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{1-\cos\frac{x}{2}}$

[15] $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} 2x}{x+\operatorname{sen} 3x}$ [16] $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen}(a+x)}-e^{\operatorname{sen} a}}{\operatorname{sen}(a+x)-\operatorname{sen} a}$

[17] $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen} x}-x-1}{2x^2-x^3}$ [18] $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\pi x)-\pi x}{2x^2\operatorname{tg}(\pi x)}$

[19] $\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x+(\ln x)^3}$ [20] $\lim_{x\to 1}\left(\frac{e}{e^x-e}-\frac{1}{x-1}\right)$

[21] $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^3-8}$ [22] $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$

[23] $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\operatorname{tg} x}{x-\frac{\pi}{4}}$ [24] $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

[25] $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4x}{x\sqrt{x^2-4x}}$ [26] $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{4x^2-7x+1}}{\sqrt[3]{1-8x-x^3}}$

[27] $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-1}-\sqrt{x^2-2x+1}\right)$ [28] $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}-x\right)$

[29] $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\operatorname{tg} x}{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$ [30] $\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$

[31] $\lim_{x\to\infty}x\cdot e^{-x}$ [32] $\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{1/x}$

[33] $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$	[34] $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4}\right)^x$
[35] $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{\frac{x+3}{4}}$	[36] $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$
[37] $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}, \quad a,b>1$	[38] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)\operatorname{sen} x}{x^3}$
[39] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{\operatorname{sen} x - x}$	[40] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^3}$
[41] $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+2\cos x)^{1/\cos x}$	[42] $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3-2x+3)^{1/x}$
[43] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$	[44] $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$
[45] $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$	[46] $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg} x}$
[47] $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x+\operatorname{sen} x}{e^x+\cos x}$	[48] $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{\ln x} - \dfrac{1}{x\ln x}\right)$
[49] $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x+\cos x}$	[50] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x-\ln(\cos x)}{x^2}$
[51] $\lim\limits_{x\to 0} (a^{2x}-1)^{x/2}$	[52] $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} 2x)^{1/\ln x}$
[53] $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2x(e^x+1)}\right]$	[54] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(e^x-1)}{\cos x - \operatorname{sen} x + x - 1}$
[55] $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-x-1}{x^2}$	[56] $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^x$
[57] $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln x$	[58] $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\cos(x-1)}{\ln^2 x}$

Solución:

[1] $\dfrac{1}{2}$	[2] 1	[3] 0	[4] $\dfrac{1}{2}$	[5] $\dfrac{2}{27}$
[6] 2	[7] 0	[8] $e^{6/\pi}$	[9] 1	[10] $-\dfrac{1}{8}$
[11] $-\dfrac{1}{5}$	[12] $e^{-4/\pi}$	[13] $\dfrac{8}{27}$	[14] 16	[15] $-\dfrac{1}{4}$
[16] $e^{\operatorname{sen} a}$	[17] $\dfrac{1}{4}$	[18] $\dfrac{\pi^2}{6}$	[19] 0	[20] $-\dfrac{1}{2}$
[21] $-\dfrac{1}{12}$	[22] $\dfrac{a}{b}$	[23] -2	[24] -1	[25] ∞
[26] 0	[27] 3	[28] -1	[29] ∞	[30] 0
[31] $\begin{cases} 0, & \text{si } x\to+\infty \\ -\infty, & \text{si } x\to-\infty \end{cases}$	[32] e	[33] 1	[34] e^{-2}	[35] $e^{3/4}$

[36] $\sqrt{ab}$	[37] $\max\{a,b\}$	[38] $\dfrac{1}{2}$	[39] -2	[40] $\dfrac{1}{6}$
[41] e^2	[42] 1	[43] 2	[44] e^{-6}	[45] 1
[46] 1	[47] 1	[48] 2	[49] 1	[50] 1
[51] 1	[52] e^{-1}	[53] ∞	[54] -2	[55] $\dfrac{1}{2}$
[56] e^2	[57] 0	[58] $\dfrac{1}{2}$		

2.8. Miscelánea

1. Una partícula se desplaza a lo largo de la curva de ecuación $y = f(x)$ siendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
   a) ¿Hay algún punto en la trayectoria de la partícula en el que dicha curva no admite recta tangente?.
   b) Determinar las coordenadas del punto de la trayectoria en el que se alcanza la máxima altura.
   c) ¿A qué recta se aproxima la trayectoria cuando $x \to \infty$?. Justificar la respuesta.

   Solución: $x = 0$; $(1, 1/e)$; $y = 0$.

2. Calcular a y b sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} ax + 5x^2, & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{a}{x} + bx, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$
   es derivable.

   Solución: $a = -20$, $b = -5$

3. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
   a) Calcular los límites laterales de f en $x = 0$. ¿Es continua en $x = 0$?
   b) Calcular el valor de la derivada de f en $x = 1$.

   Solución: $f(0^-) = 1$, $f(0^+) = 0$, No; $f'(1) = \frac{e}{(e+1)^2}$

4. Determinar una función polinómica de grado 3 sabiendo que alcanza un máximo en $x = 1$, que su gráfica pasa por el punto $(1, 1)$ y que la recta de ecuación $y = x$ es tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 0$.

   Solución: $f(x) = -x^3 + x^2 + x$

5. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida en la forma

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x + \dfrac{2}{3}, & \text{si } x \leq -2 \\ 0, & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ \dfrac{x^3}{3} - x + \dfrac{2}{3}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   Estudiar la derivabilidad de f.

   <u>Solución</u>: f es derivable en $\mathbb{R} - \{-2\}$

6. *a*) Determinar el valor de las constantes a y b sabiendo que la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   admite recta tangente en el punto $(0, 1)$.

   b) ¿Existen constantes c y d para las cuales la gráfica de la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } x \leq 0 \\ cx^2 + d, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   admite recta tangente en el punto $(0, 1)$? (justificar la respuesta).

   <u>Solución</u>: $a = -1$, $b = 1$. No existen.

7. ($\star$)Consideremos la $f :]-\infty, 10[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a^x - 6, & \text{si } x < 2 \\ |x - 5|, & \text{si } 2 \leq x < 10 \end{cases}$$

   a) Determinar el valor de a sabiendo que f es continua (y que $a > 0$).

   b) Esbozar la gráfica de f.

   c) Estudiar la derivabilidad de f.

   <u>Solución</u>: $a = 3$, f es derivable en $]-\infty, 10[-\{2, 5\}$

8. Sea k un número real y f una función definida sobre $\mathbb{R}$ mediante:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) + kx, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   a) Calcular $f'(0)$.

   b) Calcular la función derivada.

   c) ¿Es continua $f'(x)$ en $x = 0$?.

   <u>Solución</u>: $f'(0) = k$; $f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} + k, & \text{si } x \neq 0 \\ k, & \text{si } x = 0 \end{cases}$; No.

9. **Selectividad Septiembre 2000**. Determinar el valor de las constantes a, b, c sabiendo que la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x(ax^2 + bx + c)$$

tiene un punto de inflexión en $(-2, 12)$ y que en dicho punto la recta tangente tiene por ecuación $10x + y + 8 = 0$.

<u>Solución</u>: $a = 1$, $b = 6$, $c = 2$.

10. ($\star$)**Selectividad Junio 2001**. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = |8 - x^2|$.

   a) Esboza la gráfica y hallar los extremos relativos de f (dónde se alcanzan y cuáles son sus respectivos valores).

   b) Calcular los puntos de corte de la gráfica de f con la recta tangente a la misma en el punto de abscisa $x = -2$.

<u>Solución</u>: $(-2\sqrt{2}, 0), (2\sqrt{2}, 0)$ mínimos locales; $(0, 8)$ máximo local. Puntos de corte: $P(-2, 4)$, $Q(2 + 2\sqrt{6}, 20 + 8\sqrt{6})$, $R(2 - 2\sqrt{6}, 20 - 8\sqrt{6})$.

11. **Selectividad Septiembre 2003**. Estudiar la derivabilidad de la funcion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 - |x|}, & \text{si } x \neq -1 \text{ y } x \neq 1 \\ 0, & \text{si } x = -1 \text{ o } x = 1 \end{cases}$$

<u>Solución</u>: f es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

12. **Selectividad Junio 2004**. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

   - Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
   - Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de f. ¿Tiene puntos de inflexión la gráfica de f?.

<u>Solución</u>: tangente $\equiv y = -2(x - 1)$, normal $\equiv y = \frac{1}{2}(x - 1)$, f es cóncava en $]-\infty, \frac{2}{3}[$ y convexa en $]\frac{2}{3}, +\infty, [$. El punto $P\left(\frac{2}{3}, \frac{20}{27}\right)$ es de inflexión.

13. **Selectividad Junio 2004**. Sabemos que la función $f :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

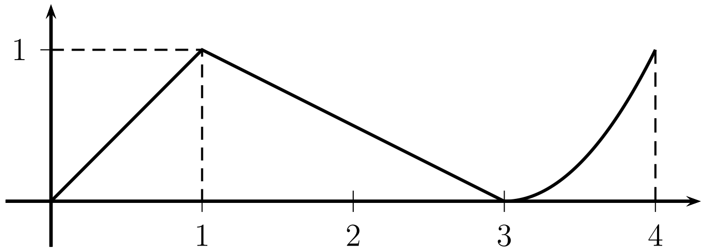
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ \dfrac{x^2 + a}{x + 1}, & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

es continua en $]-1, +\infty[$.

   - Hallar el valor de a. ¿Es f derivable en $x = 0$?.
   - Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

<u>Solución</u>: $a = 3$. No; f decrece en $]-1, 1[$ y crece en $]1, +\infty[$.

14. **Selectividad septiembre 2004**. De una función $f : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f(1) = 3$ y que la gráfica de su función derivada es la que aparece en el siguiente dibujo:



   a) Hallar la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
   b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. ¿En qué punto alcanza la función f su máximo absoluto?.
   c) Estudiar la concavidad y la convexidad de f.

   Solución: $y = x+2$; f crece en $]0, 4[$; f alcanza el máximo absoluto en $x = 4$; f es convexa en $]0, 1[\cup]3, 4[$; cóncava en $]1, 3[$.

15. **Selectividad junio 2005**. De la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx+d$, se sabe que tiene un máximo en $x = -1$, que su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa $x = -2$, y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$. Calcular a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.

   Solución: $a = 1$, $b = 0$, $c = -3$, $d = 2$.

16. **Selectividad junio 2006**. Determinar un punto de la curva de ecuación:

$$y = xe^{-x^2}$$

   en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.

   Solución: $x = 0$.

17. **Selectividad septiembre 2006**. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$.

   a) Estudiar la derivabilidad de f.
   b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
   c) Calcular los extremos relativos de f (puntos donde se alcanzan y valor de la función).

   Solución: f es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$;
   f decrece en $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]0, \frac{1}{2}\right[$ y crece en $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Los puntos $\left(\pm\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ son mínimos locales y $(0, 0)$ es un máximo local.

18. **Selectividad junio 2007**. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$. Determinar a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

   Solución: $a = 26$, $b = 19$.

19. **Selectividad septiembre 2008**. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

   a) Hallar a, b sabiendo que f es derivable en $\mathbb{R}$.

   b) Determina la recta tangente y la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

   Solución: $a = 2$, $b = -7$; tangente $\equiv y = 13(x - 1)$, normal $\equiv y = \dfrac{341 - x}{13}$.

20. **Selectividad junio 2010**. Calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2}$$

   Solución: 0.

21. **Selectividad septiembre 2010**. Consideremos la funcion $f : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ cx, & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

   a) Sabiendo que f es derivable en todo el dominio y que verifica $f(0) = f(4)$, determinar los valores de a, b, c.

   b) Para $a = -3$, $b = 4$, $c = 1$, hallar los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

   Solución: $a = -3$, $b = 4$, $c = 1$; los puntos $(0, 4)$, $(4, 4)$ son máximos absolutos, y $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{4}\right)$ es un mínimo local y absoluto.

22. **Selectividad septiembre 2011**. Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3}, \quad \text{para } x \neq 0$$

   - Estudiar las asíntotas de la gráfica de la función.
   - Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan.

   Solución: $x = 0$, asíntota vertical; $y = 3x$, asíntota oblicua; f crece en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, decrece en $]-1, 1[-\{0\}$; $(-1, -4)$ máximo; $(1, 4)$ mínimo.

23. **Selectividad junio 2012**. Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x(x - 2)$.

   a) Calcular las asíntotas de f.

   b) Hallar los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

   c) Determinar, si existen, los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Solución: $y = 0$, asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$; f decrece en $]-\infty, 1[$, crece en $]1, +\infty[$; $(1, -e)$ mínimo local; $(0, -2)$ inflexión.

24. **Selectividad junio 2012**. Sabiendo que $\lim_{x \to 0} \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} x - xe^x}{x^2}$ es finito, calcular el valor de a y el de dicho límite.

    Solución: $a = 1$; límite $= -1$

25. **Selectividad septiembre 2012**. Sea la función continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + k, & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

    a) Calcular el valor de k.
    b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

    Solución: $k = 1$, $y = 2x + e - 3$

Capítulo 3

Extremos condicionados

1. En un terreno llano se desea acotar una parcela rectangular usando 80 m. de tela metálica para vallarla, pero dejando en uno de sus lados una abertura de 20 m. sin vallar como se muestra en la figura:

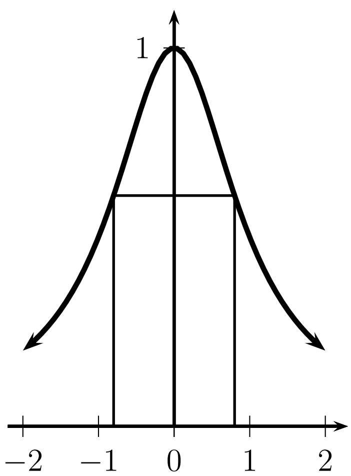
Hallar las dimensiones de la parcela rectangular de área máxima que puede acotarse de esa manera y el valor de dicha área.

Solución: Base y altura = 25 m., área = $625\,\mathrm{m}^2$.

2. Se toma una cuerda de 5 metros de longitud y se unen los extremos. Entonces podemos construir con ella triángulos isósceles de diferentes medidas. Calcular, de manera razonada, las dimensiones del que tiene mayor área y decir qué tipo de triángulo resulta.

Solución: Equilátero, Base = $\frac{5}{3}$ m.

3. De entre todos los rectángulos inscritos, como indica la siguiente figura, entre la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y el eje OX, halla el de mayor área.



Solución: $x = 1$ ó $x = -1$; área = 1.

4. La suma de todas las aristas de un prisma recto de base cuadrada es 48 cm. Calcular las dimensiones del prisma para que el volumen sea máximo.

   Solución: Base y altura = 4 cm.

5. Una boya formada por dos conos rectos de hierro, unidos por sus bases ha de ser construida mediante dos placas circulares de 3 m. de radio. Calcular las dimensiones de la boya para que su volumen sea máximo.

   Solución: radio = $\sqrt{6}$ m. y altura = $\sqrt{3}$ m.

6. Hallar el radio del cilindro de máximo volumen inscrito en un cono de radio 6 m. y altura 9 m.

   Solución: radio = 4 m. y altura = 3 m.

7. Se quiere limitar una parcela de 24 m^2 por una valla rectangular y además dividirla en dos partes iguales por medio de otra valla paralela a uno de los lados. ¿Qué dimensiones deben elegirse para que la cantidad de valla sea mínima?.

   Solución: largo = 6 m. y ancho = 4 m.

8. De todos los cilindros inscritos en una esfera de radio 1 m., hallar el volumen del que lo tenga máximo.

   Solución: radio = $\frac{\sqrt{6}}{3}$ m., altura = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ m., volumen = $\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$ m^3.

9. De todos los conos inscritos en una esfera de radio = 3, hallar el de mayor volumen.

   Solución: radio = $2\sqrt{2}$; altura = 4

10. Hallar las coordenadas de los puntos de la curva $y^2 = 9x$ tal que su distancia al punto $(9, 0)$ sea mínima.

    Solución: $\left(\frac{9}{2}, \frac{9\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{9}{2}, -\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)$

11. Se quiere construir una alberca de forma cilíndrica. Hallar las dimensiones que tiene que tener para que el volumen de agua contenida sea máximo, teniendo en cuenta que solo se cuenta con 300 m^2 de azulejo para alicatarla (suelo incluido).

    Solución: radio = $\frac{10}{\sqrt{\pi}}$ m., altura = $\frac{10}{\sqrt{\pi}}$ m.

12. Tenemos un cartón de forma cuadrada de lado 4 dm. ¿Qué longitud ha de tener el lado del cuadrado que cortamos en cada vértice para que se pueda formar una caja de volumen máximo?.

    Solución: $\frac{2}{3}$ dm.

13. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 90 cm. Si gira alrededor de uno de sus catetos, ¿qué medida han de tener estos para que el volumen del cono engendrado sea máximo?.

    Solución: $30\sqrt{6}$ cm. y $30\sqrt{3}$ cm.

14. Siendo la suma de los catetos de un triángulo rectángulo 10 cm., hallar el de área máxima.

    Solución: 5 cm. cada cateto.

15. Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio $\sqrt{2}$. ¿Cuál es el de superficie máxima?.

    Solución: base $= 2$, altura $= 2$

16. Hallar a con la condición de que la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación:

    $$x^2 + (2-a)x - a - 3 = 0$$

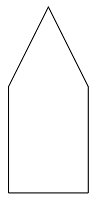
    sea mínima?.

    Solución: $a = 1$

17. En una esfera de radio 18 cm., hallar las dimensiones del cilindro inscrito de área lateral máxima y calcular esta.

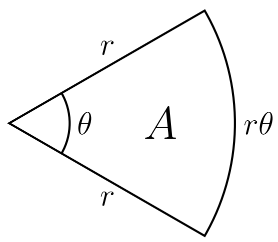
    Solución: radio $= 9\sqrt{2}$ cm., altura $= 18\sqrt{2}$ cm., Área $= 648\pi$ cm^2.

18. Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior ha sido sustituido por un triángulo equilátero tal y como se indica en la figura. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de $6'6$ m., hallar sus dimensiones para que su superficie sea máxima.

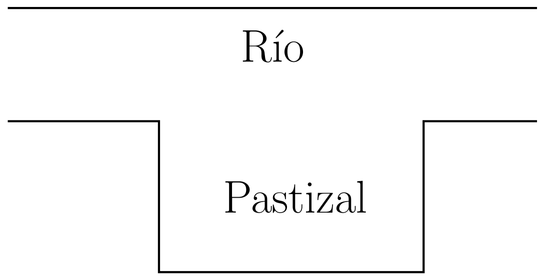
    Solución: lado rectángulo $= \frac{6+\sqrt{3}}{5}$ m. ; lado triángulo $= \frac{15-3\sqrt{3}}{10}$ m.

19. Un jardinero desea construir un parterre con forma de sector circular. Si dispone de 20 m. de alambre para rodearlo, ¿qué radio debe tener el sector para que el parterre tenga la máxima superficie posible?.

    Solución: radio $= 5$ m.

20. Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El pastizal debe tener 180 000 m^2 para producir suficiente forraje para su ganado. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de modo que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita ser vallado?.



Solución: largo = 600 m., ancho = 300 m.

21. De entre todos los rectángulos de 40 kilómetros de perímetro, calcular las dimensiones del que tiene área máxima.

    Solución: largo = 10 Km., ancho = 10 Km.

22. Se ha observado que en una carretera de salida de una gran ciudad la velocidad de los coches entre las 2 h. y las 6 h. de la tarde viene dada por

$$v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8, \quad \text{para } t \in [2,6]$$

    a) ¿A qué hora circulan los coches con mayor velocidad?. Justificar la respuesta.

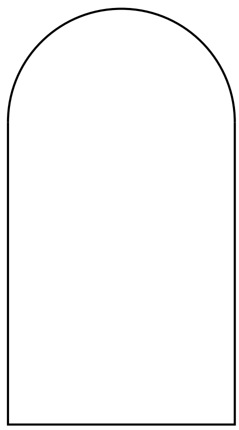
    b) ¿A qué hora circulan los coches con menor velocidad?. Justificar la respuesta.

    Solución: $t = 4$ h., $t = 2$ h.

23. Una empresa quiere fabricar vasos de cristal de forma cilíndrica con una capacidad de 250 centímetros cúbicos. Para utilizar la mínima cantidad posible de cristal, se estudian las medidas apropiadas para que la superficie total del vaso sea mínima. ¿Cuáles deben ser dichas medidas?. Justificar las respuestas.

    Solución: radio del cilindro = altura del cilindro = $5\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$

24. Determinar las dimensiones de una puerta formada por un rectángulo



y un semicírculo (como en la figura), sabiendo que es la que tiene perímetro mínimo entre las que tienen área igual a 2 m^2 .

Solución: base del rectángulo = $\dfrac{4}{\sqrt{4+\pi}}$, altura del rectángulo = $\dfrac{2}{\sqrt{4+\pi}}$

25. Consideremos la funcion $f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x - 2$. Calcular el punto de la gráfica de f más cercano al punto $(2,6)$ y también el más alejado.

    Solución: el más cercano es $P\left(\frac{13}{5}, \frac{29}{5}\right)$ y el más alejado es $Q(0,-2)$.

26. La capacidad de concentración de una saltadora de altura en una reunión atlética de tres horas de duración viene dada por la función $f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 300t(3-t)$ donde t mide el tiempo en horas.

    a) Calcular los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y los intervalos en los que disminuye. ¿Cuándo es nula?.
    b) ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la saltadora pueda batir su propia marca?.
    c) Representar gráficamente la función de capacidad de concentración.

    Solución: f crece en $[0, 3/2[$ y decrece en $]3/2, 3]$. Es nula en $t = 0, 3$ horas. El mejor momento para batir su propia marca es $t = \frac{3}{2}$ horas.

27. Dos partículas se mueven en el plano XOY. En cada instante de tiempo t las posiciones de las partículas son, respectivamente

    $$A\left(\frac{1}{2}(t-1), \frac{\sqrt{3}}{2}(1-t)\right) \quad \text{y} \quad B(2-t, 0)$$

    Determinar el instante t_0 en el que las partículas están más próximas entre sí y a qué distancia se hallan una de otra en ese instante.

    Solución: $t_0 = \frac{3}{2}$, distancia $= \frac{1}{2}$.

28. **Selectividad Junio 2000**. Se dispone de 288 000 pts. para vallar un terreno rectangular colindante con un camino recto. Si el precio de la valla que ha de ponerse en el lado del camino es de 800 pts/metro y el de la valla de los restantes lados es de 100 pts/metro, ¿cuáles son las dimensiones y el área del terreno rectangular de área máxima que se puede vallar?.

    Solución: 160 y 720 m., superficie = 115 200 m^2.

29. **Selectividad Junio 2000**. Un objeto se lanza hacia arriba desde un determinado punto. La altura en metros alcanzada al cabo de t segundos, viene dada por

    $$h(t) = 5 - 5t - 5e^{-2t}$$

    a) Calcular el tiempo transcurrido hasta alcanzar la altura máxima y el valor de ésta.
    b) Teniendo en cuenta que la velocidad es $v(t) = h'(t)$, hallar la velocidad al cabo de 2 segundos.

    Solución: $t = \frac{\ln 2}{2}$ seg., altura máxima $= \frac{5}{2}(1 - \ln 2)$ m.; $v(2) = -5 + 10e^{-4}$ m/seg.

30. **Selectividad septiembre 2004**. Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada con una capacidad de 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 1€/cm^2 y para la base se emplea un material un 50 % más caro. Hallar las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.

    Solución: base = 4 cm, altura = 5 cm.

31. **Selectividad septiembre 2006**. Un alambre de longitud 1 metro se divide en dos trozos, con uno se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Calcula las longitudes de los dos trozos para que la suma de las áreas de ambos recintos sea mínima.

    Solución: longitud del cuadrado $= \dfrac{4}{\pi+4}$ m, longitud del círculo $= \dfrac{\pi}{\pi+4}$ m.

32. **Selectividad Junio 2007**. Determinar dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

    Solución: $5, 5$.

33. **Selectividad Junio 2008**. De entre todos los rectángulos de perímetro 8 cm., determinar las dimensiones del que tiene la diagonal de menor longitud.

    Solución: el cuadrado de lado 2 cm.

34. **Selectividad septiembre 2008**. De entre todas las rectas del plano que pasan por el punto $(1, 2)$, encontrar aquella que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Hallar el área de dicho triángulo.

    Solución: $2x + y = 4$, área $= 4$.

35. **Selectividad septiembre 2009**. De entre todos los rectángulos cuya área mide 16 cm^2, determinar las dimensiones del que tiene la diagonal de menor longitud.

    Solución: el cuadrado de lado 4 cm.

36. **Selectividad septiembre 2010**. Una hoja de papel tiene que contener 18 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior han de tener 2 cm. cada uno y los laterales 1 cm. Calcular las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel es mínimo.

    Solución: 5×10.

37. **Selectividad junio 2011**. Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total igual a 54 m^2. Determinar el radio de la base y la altura del cilindro para que éste tenga volumen máximo.

    Solución: radio de la base $= \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ m, altura del cilindro $= \frac{6}{\sqrt{\pi}}$ cm.

38. **Selectividad junio 2011**. Sea $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$. Determinar el punto P de la gráfica de f que se encuentra a menor distancia del punto $A(2, 0)$. ¿Cuál es esa distancia?.

    Solución: $P\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $d(A, P) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

39. **Selectividad septiembre 2011**. Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y de área máxima.

    Solución: base $= \frac{8}{3}$, altura $= \frac{4\sqrt{3}}{3}$

    Nota: este problema es idéntico al 2, cambiando datos, en concreto, el 8 por el 5.

Capítulo 4

Representación de curvas explícitas

Nota: Los problemas marcados con un asterisco ($\star$), significan que parte de la solución, generalmente un gráfico, está detallada en el archivo `graficos.pdf`.

4.1. Dibujo de curvas

Representar las siguientes funciones:

[1] $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$; [2] $y = f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

[3] $y = f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 3x}$; [4] $y = f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

[5] $y = f(x) = (1 - \cos x)^2$; [6] $y = f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

[7] $y = f(x) = \ln(x^3 - 3x + 2)$; [8] $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

[9] $y = f(x) = x + \operatorname{sen} x$; [10] $y = f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \cos^2 x}$

[11] $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 10}$; [12] $y = f(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}$

[13] $y = f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$; [14] $y = f(x) = x \ln x$

[15] $y = f(x) = \dfrac{x^2(2x - 1)}{2x^2 - 1}$; [16] $y = f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)(x - 3)}$

[17] $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$; [18] $y = f(x) = \dfrac{(x - 2)^2}{x^2 + 2}$

[19] $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 6}{(x - 2)^2}$; [20] $y = f(x) = x^2 - 6|x| + 5$

[21] $y = f(x) = \dfrac{x|x|}{|x + 1|}$; [22] $y = f(x) = \dfrac{1 + \ln|x|}{x}$

[23] $y = f(x) = \ln\left|\dfrac{x - 1}{x - 3}\right|$; [24] $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 4x + 3}$

$$[25]\ y = f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - x^2, & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ -3, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$[26]\ y = f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < -4 \\ x + 2, & \text{si } -4 \leq x < 2 \\ \dfrac{8}{x}, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

4.2. Miscelánea

1. ($\star$)Sea $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, siendo ln el logaritmo neperiano.

   a) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

   b) Hallar los intervalos de concavidad (f'' negativa) y de convexidad (f'' positiva) de f.

   c) Obtener, si los hay, los extremos globales de f.

   d) Encontrar las asíntotas de f y esboza su gráfica.

   e) Probar que existe un número $a \neq \pi$ tal que $a^\pi = \pi^a$.

   Solución: f es creciente en $]0, e[$ y decreciente en $]e, +\infty[$, cóncava en $]0, e^{3/2}[$ y convexa en $]e^{3/2}, +\infty[$. Máximo absoluto en $x = e$. Asíntotas: $x = 0$, $y = 0$.

2. ($\star$)Sea f' la función derivada de una función derivable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se sabe que f' es continua y que:

   a) $f'(0) = 0$, $f'(2) = 1$, $f'(3) = 0$, $f'(4) = -1$, $f'(5) = 0$.

   b) f' es estrictamente creciente en los intervalos $]-\infty, 2[$ y $]4, +\infty[$.

   c) f' es estrictamente decreciente en el intervalo $]2, 4[$.

   d) La recta de ecuación $y = \frac{x}{2}$ es una asíntota oblicua de f' cuando $x \to +\infty$.

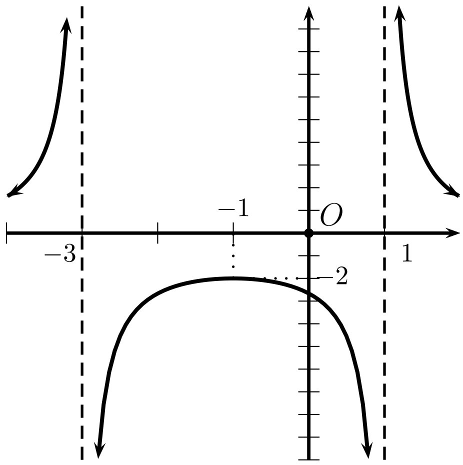
   Se pide:

   1) Esbozar la gráfica de f'.

   2) ¿En qué valores de x alcanza f sus máximos y mínimos relativos?.

   Solución: En $x = 0, 5$ hay mínimos relativos y en $x = 3$ un máximo relativo.

3. **Selectividad Junio 2000**. Determinar a, b y c para que la curva $y = \dfrac{a}{x^2 + bx + c}$ sea la siguiente:



Solución: $a = 8$, $b = 2$, $c = -3$.

4. ($\star$)Sea f la función definida para $x \neq -2$ por

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

   a) Hallar las asíntotas de la gráfica de f.

   b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos locales de f.

   c) Teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores, haz un esbozo de la gráfica de f.

   Solución: $x = -2$, asíntota vertical; $y = x-2$, asíntota oblicua; f crece en $]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$, f decrece en $]-4, 0[-\{-2\}$; $x = -4$, máximo local; $x = 0$, mínimo local.

5. ($\star$)Sea f la función definida para $x \neq 1$ por

$$f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$$

   a) Hallar las asíntotas de la gráfica de f.

   b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos locales de f.

   c) Esbozar la gráfica de f.

   Solución: $x = 1$, asíntota vertical; $y = 2x+2$, asíntota oblicua; f crece en $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, f decrece en $]0, 2[-\{1\}$; $x = 0$, máximo local; $x = 2$, mínimo local.

6. ($\star$)**Selectividad Junio 2002**. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$$

   a) Calcular las asíntotas de la gráfica de f.

   b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

   c) Con los datos obtenidos, esbozar la gráfica de f.

Solución: $y = 1$, asíntota horizontal; f decrece en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, f crece en $]-1, 1[$; $x = -1$, mínimo local; $x = 1$, máximo local; $f(-1) = \frac{1}{e}$, $f(1) = e$.

7. ($\star$)**Selectividad Junio 2002**. Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{9x-3}{x^2-2x}$ para $x \neq 0$ y $x \neq 2$.

   a) Calcular las asíntotas de la gráfica de f.

   b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

   c) Con los datos obtenidos, esbozar la gráfica de f.

   Solución: $y = 0$, asíntota horizontal; $x = 0, 2$, asíntotas verticales; f decrece en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.

8. ($\star$)**Selectividad Junio 2003**. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x+3)e^{-x}$.

   a) Calcular las asíntotas de la gráfica de f.

   b) Determinar los extremos relativos de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

   c) Esbozar la gráfica de f.

   Solución: $y = 0$, asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$; $(-2, e^2)$, máximo; $(-1, 2e)$, inflexión.

9. ($\star$)**Selectividad junio 2005**. Sea f la función definida para $x \neq 0$ por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

   a) Estudiar y determinar las asíntotas de la gráfica de f.

   b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcular sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

   c) Esbozar la gráfica de f.

   Solución: $x = 0$, asíntota vertical; $y = x$, asíntota oblicua. f crece en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ y decrece en $]-1, 1[-\{0\}$. El punto $(-1, -2)$ es un máximo local y $(1, 2)$ es un mínimo local.

10. ($\star$)**Selectividad septiembre 2005**. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$

    a) Hallar las asíntotas de la gráfica de f.

    b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcular, si existen, sus extremos relativos o locales y sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

    c) Esbozar la gráfica de f.

    Solución: $y = 0$, asíntota horizontal; f decrece en $]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$ y crece en $]1, 3[$. El punto $(1, 0)$ es un mínimo local y absoluto, y $(3, 4e^{-3})$ es un máximo local no absoluto.

11. ($\star$)**Selectividad junio 2006**. Sea f la función definida para $x \neq 0$ por $f(x) = \dfrac{x^4+3}{x}$

a) Hallar, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de f.

b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y los extremos relativos de f.

c) Esbozar la gráfica de f.

Solución: No hay cortes con los ejes; $x = 0$ es la única asíntota (vertical); f crece en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ y decrece en $]-1, 1[-\{0\}$. El punto $(-1, -4)$ es un máximo local y $(1, 4)$ es un mínimo local.

12. **Selectividad septiembre 2007**. Sea $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}$$

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que alcanzan).

b) Calcula el punto de inflexión de la gráfica de f.

Solución: f decrece en $]0, \frac{1}{3}[$ y crece en $]\frac{1}{3}, +\infty[$. El punto $\left(\frac{1}{3}, 2\sqrt{3}\right)$ es un mínimo local. Inflexión en $(1, 4)$.

13. **Selectividad junio 2008**. Sea f la función definida para $x > 0$ por

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

Determinar las asíntotas de la gráfica de f.

Solución: $x = 0$, asíntota vertical; $y = x + 1$, asíntota oblicua.

14. ($\star$)**Selectividad junio 2009**. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x - 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f.

b) Determinar sus asíntotas y extremos relativos.

c) Esbozar la gráfica de f

Solución: f es continua en $\mathbb{R}$, f es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$; $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$; $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{13}{4}\right)$ es un mínimo local.

15. **Selectividad septiembre 2009**. Se considera la función $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$$

Determinar la asíntota de la gráfica de f.

Solución: $y = 2x - \dfrac{1}{2}$

16. **Selectividad junio 2010**. Sea f la función definida como

$$f(x) = \frac{ax^2+b}{a-x}, \quad \text{para } x \neq a$$

 a) Calcular a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(2,3)$ y tenga una asíntota oblicua con pendiente -4.

 b) Para el caso $a=2$, $b=3$, obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

 Solución: $a=4$, $b=-10$. La recta tangente en $x=1$ es $y=9x-4$.

17. **Selectividad septiembre 2012**. Sea la función f definida por $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$ para $x \neq 1$.

 a) Estudiar las asíntotas de la gráfica de la función f.

 b) Hallar los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

 Solución: $x=1$ es asíntota vertical, $y=0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$. El punto $(0,1)$ es un mínimo local; f decrece e $]-\infty,0[$; f crece en $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

Capítulo 5

Cálculo de Primitivas

5.1. Tabla de integrales inmediatas

$$[1] \int f'(x)\big[f(x)\big]^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} & \text{si } n \neq -1 \\ \ln[f(x)] & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

$$[2] \int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)}$$

$$[3] \int f'(x)a^{f(x)}\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a}$$

$$[4] \int f'(x)\operatorname{sen}(f(x))\,dx = -\cos(f(x))$$

$$[5] \int f'(x)\cos(f(x))\,dx = \operatorname{sen}(f(x))$$

$$[6] \int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}\,dx = \int f'(x)\big[1+\operatorname{tg}^2(f(x))\big]\,dx = \operatorname{tg}(f(x))$$

$$[7] \int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2(f(x))}\,dx = \int f'(x)\big[1+\operatorname{ctg}^2(f(x))\big]\,dx = -\operatorname{ctg}(f(x))$$

$$[8] \int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg}[f(x)]$$

$$[9] \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen}[f(x)]$$

$$[10] \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}}\,dx = \ln\big(f(x)+\sqrt{1+[f(x)]^2}\big)$$

$$[11] \int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-1}}\,dx = \ln\big(f(x)+\sqrt{[f(x)]^2-1}\big)$$

5.2. Inmediatas

[1] $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2}-1\right) dx = -\frac{1}{x} - x + C$

[2] $\displaystyle\int \frac{x+1}{x}\, dx = x + \ln x + C$

[3] $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x-5}}\, dx = 2\sqrt{x-5} + C$

[4] $\displaystyle\int \sqrt[5]{x^2}\, dx = \frac{5x^{7/5}}{7} + C$

[5] $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\, dx = \frac{3(x+1)^{2/3}}{2} + C$

[6] $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)^3}\, dx = -\frac{1}{2(x-2)^2} + C$

[7] $\displaystyle\int \cos(3x-1)\, dx = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(3x-1) + C$

[8] $\displaystyle\int 3^{x+1}\, dx = \frac{3^{x+1}}{\ln 3} + C$

[9] $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\, dx = \ln(e^x+1) + C$

[10] $\displaystyle\int \frac{1}{2-x}\, dx = -\ln(2-x) + C$

[11] $\displaystyle\int (2+\mathrm{tg}^2\, x)\, dx = x + \mathrm{tg}\, x + C$

[12] $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\, dx = \ln(\ln x) + C$

[13] $\displaystyle\int \mathrm{ctg}\, x\, dx = \ln(\mathrm{sen}\, x) + C$

[14] $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^4}\, dx = \mathrm{arc\,tg}(x^2) + C$

[15] $\displaystyle\int \mathrm{sen}^3\, x\cos x\, dx = \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}^4\, x + C$

[16] $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \sqrt{1+x^2} + C$

[17] $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\mathrm{sen}^2\, x}\, dx = \mathrm{arc\,tg}(\mathrm{sen}\, x) + C$

[18] $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$

[19] $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^3}{x}\, dx = \frac{(\ln x)^4}{4} + C$

[20] $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\, dx = \frac{1}{3}\,\mathrm{arc\,sen}(x^3) + C$

[21] $\displaystyle\int \frac{4}{1-3x}\, dx = -\frac{4}{3}\ln(3x-1) + C$

[22] $\displaystyle\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -\ln(\cos x) + C$

[23] $\displaystyle\int \mathrm{sen}\, x\cos x\, dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2\, x + C$

[24] $\displaystyle\int 5\cdot 3^{1-x}\, dx = -5\frac{3^{1-x}}{\ln 3} + C$

[25] $\displaystyle\int x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

[26] $\displaystyle\int \mathrm{sen}^2\, x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{sen}\, 2x}{4} + C$

[27] $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\mathrm{sen}\, 2x}{4} + C$

[28] $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x}\, dx = -\,\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

[29] $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1-\cos x}\, dx = -\,\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) - x + C$

[30] $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{sen}\, x}\, dx = \ln\left(\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right) + C$

[31] $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\sqrt{1-x^2} + C$

[32] $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+2x)^4}\, dx = -\frac{1}{6x^3(x+2)^3} + C$

[33] $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,sen}(x^2) + C$

[34] $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx = 2\,\mathrm{arc\,tg}(\sqrt{x}) + C$

[35] $\displaystyle\int (1+\mathrm{tg}^2\, x^3)x^2\, dx = \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\, x^3 + C$

[36] $\displaystyle\int \frac{1+\mathrm{tg}\, x}{\cos^2 x}\, dx = \frac{(1+\mathrm{tg}\, x)^2}{2} + C$

[37] $\displaystyle\int \mathrm{sen}^4\, x\cos x\, dx = \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}^5\, x + C$

[38] $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = -2\cos\sqrt{x} + C$

$$[39]\quad \int \frac{3x-1}{1+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\ln(1+x^2) - \operatorname{arc\,tg} x + C$$

$$[40]\quad \int \frac{x-1}{3x^2-6x+5}\,dx = \frac{1}{6}\ln(3x^2-6x+5) + C$$

$$[41]\quad \int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{3}x) + C$$

$$[42]\quad \int \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^3+2x+1}}\,dx = 2\sqrt{x^3+2x+1} + C$$

$$[43]\quad \int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx = -\ln(\operatorname{sen} x + \cos x) + C$$

$$[44]\quad \int \frac{2x^3+x}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1) + C$$

5.3. Integración por partes

$$[45]\quad \int x\,\operatorname{sen} x\,dx = \operatorname{sen} x - x\cos x + C$$

$$[46]\quad \int x\,e^x\,dx = (x-1)e^x + C$$

$$[47]\quad \int \operatorname{arc\,sen} x\,dx = x\,\operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$[48]\quad \int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + C$$

$$[49]\quad \int x^2\operatorname{sen} x\,dx = (2-x^2)\cos x + 2x\operatorname{sen} x + C$$

$$[50]\quad \int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x\,\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$[51]\quad \int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$$

$$[52]\quad \int x^m\ln x\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}}{(m+1)^2}\left[(m+1)\ln x - 1\right], & \text{si } m \neq -1 \\ \dfrac{\ln^2 x}{2}, & \text{si } m = -1 \end{cases} + C$$

$$[53]\quad \int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^2}\,dx = -\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) + C$$

$$[54]\quad \int (x-1)e^x\,dx = (x-2)e^x + C$$

$$[55]\quad \int x\,\operatorname{arc\,tg} x\,dx = \frac{(x^2+1)\,\operatorname{arc\,tg} x}{2} - \frac{x}{2} + C$$

$$[56]\quad \int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}\left(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + C$$

$$[57]\quad \int x^m(\ln x)^2\,dx = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}\left[(m+1)^2(\ln x)^2 - 2(m+1)\ln x + 2\right] + C$$

$$[58] \quad \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2} - \frac{x}{2(x^2+1)} + C$$

$$[59] \quad \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \operatorname{sen} bx - b\cos bx) + C$$

$$[60] \quad \int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\operatorname{sen} bx) + C$$

5.4. Racionales

$$[61] \quad \int \frac{x^2+2x+1}{x+2}\,dx = \frac{x^2}{2} + \ln(x+2) + C$$

$$[62] \quad \int \frac{x+5}{x-1}\,dx = x + 6\ln(x-1) + C$$

$$[63] \quad \int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C$$

$$[64] \quad \int \frac{x^2-x+1}{x-3}\,dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 7\ln(x-3) + C$$

$$[65] \quad \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + C$$

$$[66] \quad \int \frac{x^2+2x+3}{x^3-x}\,dx = \ln(x+1) + 3\ln(x-1) - 3\ln x + C$$

$$[67] \quad \int \frac{x+5}{x^3-3x+2}\,dx = \frac{\ln(x+2)}{3} - \frac{\ln(x-1)}{3} - \frac{2}{x-1} + C$$

$$[68] \quad \int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx = \frac{\ln(x+1)}{2} - \frac{\ln(x-1)}{2} - \frac{4}{x-1} + C$$

$$[69] \quad \int \frac{x^2+4}{(x-2)^3}\,dx = \ln(x-2) - \frac{4}{(x-2)^2} - \frac{4}{x-2} + C$$

$$[70] \quad \int \frac{1}{x^3+x}\,dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$[71] \quad \int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C$$

$$[72] \quad \int \frac{1}{x^4-1}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C$$

$$[73] \quad \int \frac{x^3+1}{x^2-5x+4}\,dx = \frac{x^2}{2} + 5x - \frac{2\ln(x-1)}{3} + \frac{65\ln(x-4)}{3} + C$$

$$[74] \quad \int \frac{x^2-x+1}{x^3+x}\,dx = \ln x - \operatorname{arc\,tg} x + C$$

$$[75] \quad \int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx = \frac{5}{3}\ln(x+1) - \frac{8}{3}\ln(x-2) + \ln x + \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

$$[76] \quad \int \frac{x^3-2x^2+x-1}{x^2-3x+2}\,dx = \ln(x-1) + \ln(x-2) + \frac{x^2}{2} + x + C$$

5.5. Cambio de variable

77) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \quad \left\{1+x^2=t^2\right\} = \frac{(x^2-2)\sqrt{x^2+1}}{3}+C$

78) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad \{x=a\cos t\} = \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C$

79) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,dx \quad \left\{x+1=t^2\right\} = 2\sqrt{x+1}-2\ln(1+\sqrt{x+1})+C$

80) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx \quad \{e^x=t\} = x-\ln(1+e^x)+C$

81) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x+4)^2}\,dx \quad \{e^x=t\} = -\frac{1}{4+e^x}+C$

82) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx \quad \left\{x=t^6\right\} = \sqrt[6]{x}(2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[6]{x}+6)-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$

83) $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{1-e^x}\,dx \quad \{e^x=t\} = x-2\ln(e^x-1)+C$

84) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx \quad \left\{x-1=t^2\right\} = \frac{2\sqrt{x-1}(5x^3+6x^2+8x+16)}{35}+C$

85) $\displaystyle\int \sec^3 x\,dx \quad \{\operatorname{sen} x=t\} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)+\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x}+C$

86) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}\,dx \quad \left\{x=\sqrt{2}t\right\} = \ln(x+\sqrt{x^2-2})+C$

5.6. Miscelánea

[87] $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3+x}\,dx = \ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+2\operatorname{arc\,tg} x+C$

[88] $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = x\operatorname{tg} x+\ln\cos x+C$

[89] $\displaystyle\int \frac{3}{4+9x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3x}{2}\right)+C$

[90] $\displaystyle\int x\cdot e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$

[91] $\displaystyle\int \frac{5x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = 5\sqrt{x^2+1}+C$

[92] $\displaystyle\int 5x\cos(x^2+3)\,dx = \frac{5}{2}\operatorname{sen}(x^2+3)+C$

[93] $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x-1)^2}\,dx = \ln(x-1)-\frac{2}{x-1}+C$

[94] $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = 3\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right)-\sqrt{9-x^2}+C$

5.7. Problemas

1. Empleando el cambio de variable $t = \operatorname{tg}(x)$, calcular:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x + \cos(x)\operatorname{sen}(x)}$$

Solución: $\ln|1 + \operatorname{tg}(x)|$

2. Calcular la integral

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\, dx$$

realizando el cambio de variable $t = \cos x$.

   a) Calcula la misma integral que en el apartado anterior pero haciendo el cambio de variable $u = \operatorname{tg} x$.

   b) ¿Se obtiene el mismo resultado en ambos casos?. Justificar la respuesta.

Solución: $\frac{1}{2\cos^2 x}$, $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}$.

3. Explicar en qué consiste el método de integración por partes. Calcular

$$\int x^2 \ln x\, dx$$

Solución: $\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9}$

4. Calcular

$$\int \frac{3}{1 + 2\sqrt{e^{-x}}}\, dx$$

Solución: $6\ln(e^{x/2} + 2)$

5. Calcular

$$\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$$

Solución: $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$

6. Hallar la función $F(x)$ tal que $F(0) = 2$ y que sea primitiva de la función

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Solución: $F(x) = \ln(e^x + 1) + 2 - \ln 2$

7. Determinar $f(x)$ sabiendo que $f'''(x) = 24x$, $f''(0) = 2$, $f'(0) = 1$ y $f(0) = 0$.

Solución: $f(x) = x^4 + x^2 + x$

8. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1 + x)e^x$.

   a) Calcular $\displaystyle\int f(x)\, dx$.

   b) Hallar una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 3)$.

Solución: $\int f(x)\,dx = xe^x + C$; $F(x) = xe^x + 3$

9. Determinar la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que su segunda derivada es constante e igual a 3 y que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es $5x - y - 3 = 0$.

   Solución: $f(x) = \frac{3x^2+4x-3}{2}$

10. Hallar una primitiva de la función $f(x) = 2x^2 \operatorname{sen} x$ cuya gráfica pase por el origen de coordenadas.

    Solución: $f(x) = -2x^2 \cos x + 4x \operatorname{sen} x + 4\cos x - 4$

11. **Selectividad Junio 2001**. Siendo $\ln x$ el logaritmo neperiano de x, consideramos la función $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \ln x$. Calcular:

    a) $\int f(x)\,dx$.

    b) Una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(1, 0)$.

    Solución: $\int f(x)\,dx = \dfrac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$, $F(x) = \dfrac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + \dfrac{1}{4}$.

12. **Selectividad Junio 2001**. De la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f''(x) = x^2 + 2x + 2$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1, 2)$. Hallar la expresión de f.

    Solución: $f(x) = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^3}{3} + x^2 - \dfrac{10x}{3} + \dfrac{47}{12}$.

13. **Selectividad Junio 2003**. Sea $\ln(1 - x^2)$ el logaritmo neperiano de $1 - x^2$ y sea $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(1 - x^2)$. Calcular la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

    Solución: $F(x) = x\ln(1 - x^2) - 2x - \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right) + 1$

14. **Selectividad Septiembre 2003**. Sea $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x - 1)\ln(x)$ donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x. Calcular la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, -3/2)$.

    Solución: $F(x) = \dfrac{2x^2\ln x - x^2 - 4x\ln x + 4x - 9}{4}$

15. **Selectividad Junio 2004**. De la función $f :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2) = 0$.

    - Determinar f.
    - Hallar la primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 1)$.

    Solución: $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$, $F(x) = x - 3\ln(x + 1) + 1$

16. **Selectividad septiembre 2005**. De una función $f : [0, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f(3) = 6$ y que su función derivada está dada por:

$$f'(x) = \begin{cases} 5x - 2, & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 6x + 8, & \text{si } 1 \le x < 5 \end{cases}$$

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcular sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

Solución: $y = 9 - x$; f crece en $\left]\frac{2}{5}, 2\right[\cup]4, 5[$ y decrece en $\left]0, \frac{2}{5}\right[\cup]2, 4[$. Los puntos $\left(\frac{2}{5}, \frac{133}{30}\right)$, $\left(4, \frac{16}{3}\right)$ son mínimos locales y $\left(2, \frac{20}{3}\right)$ es un máximo local.

17. **Selectividad septiembre 2006**. Calcular:

$$\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25}\, dx, \qquad \int (2x - 3) \operatorname{tg}(x^2 - 3x)\, dx$$

siendo tg la función tangente.

Solución: $5x - 4 \ln |x - 5| + 3 \ln |x + 5| + C$; $- \ln |\cos(x^2 - 3x)| + C$.

18. **Selectividad septiembre 2006**. Hallar la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = 12x - 6$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene de ecuación $4x - y - 7 = 0$.

Solución: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 13$

19. **Selectividad junio 2007**. Dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

Hallar la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas. (ln denota la función logaritmo neperiano).

Solución: $F(x) = x \ln(1 + x^2) - 2x + 2 \operatorname{arc\,tg} x$

20. **Selectividad septiembre 2007**. Determinar una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que su derivada viene dada por $f'(x) = x^2 + x - 6$ y que el valor que alcanza f en su punto máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto mínimo (relativo).

Solución: $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + \frac{71}{4}$

21. **Selectividad septiembre 2009**. Sea f la función definida por:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - 9x^4}}$$

Hallar la primitiva F de f que cumple $F(0) = 3$.

Sugerencia: utilizar el cambio de variable $t = \frac{3x^2}{2}$.

Solución: $F(x) = 3 + \frac{1}{6} \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{3x^2}{2}\right)$

22. **Selectividad septiembre 2010**. Sea

$$I = \int \frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}\, dx$$

 a) Expresar I haciendo el cambio de variable $t^2 = e^{-x}$.

 b) Determinar I.

 Solución: $I = -10 \cdot \ln\left(\dfrac{t}{t+1}\right)$, $I = 10 \cdot \ln\left(1 + e^{x/2}\right) + C$.

23. **Selectividad junio 2011**. Hallar:

$$I = \int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}\, dx$$

 Sugerencia: efectuar el cambio de variable $t = e^x$.

 Solución: $I = \frac{1}{2(e^x+1)} - \frac{1}{4}\ln(e^x+1) + \frac{1}{4}\ln(e^x-1)$

Capítulo 6

Integral definida y Cálculo de áreas

6.1. Resumen teórico

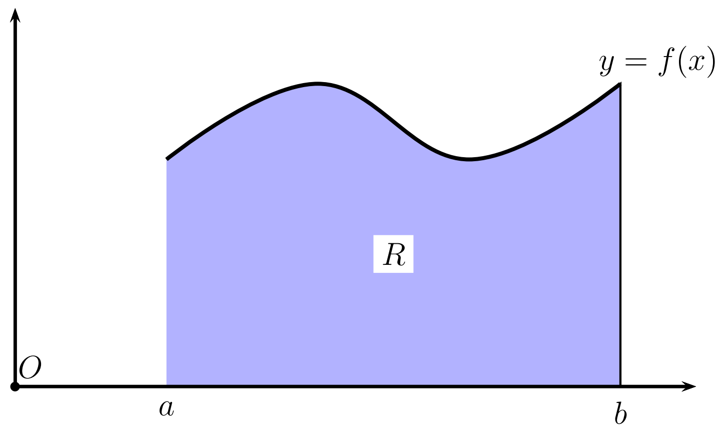
6.1.1. Área debajo de una curva

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función positiva e integrable es $[a, b]$. El área de la region

$$R \equiv \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

es el número

$$\mu(R) = \int_a^b f(x)\, dx, \qquad \text{(ver siguiente figura)} \tag{6.1}$$



6.1.2. Área de la región comprendida entre dos curvas

Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables en $[a, b]$. Supongamos además que

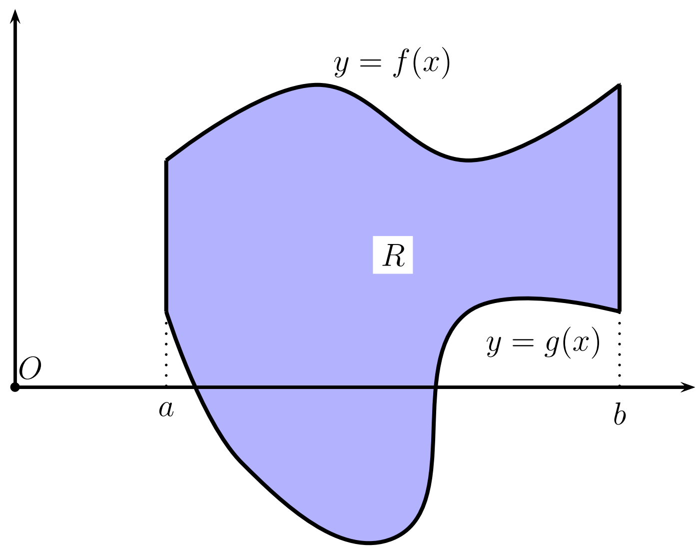
$$\forall x \in [a, b] \text{ es } g(x) \leq f(x) \tag{6.2}$$

es decir, la función f domina a g en todo $[a, b]$. En estas condiciones, el área de la región

$$R \equiv \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases} \tag{6.3}$$

es el número

$$\mu(R) = \int_a^b \big[f(x) - g(x)\big]\, dx, \qquad \text{(ver siguiente figura)} \tag{6.4}$$



Observemos que (6.1) es un caso particular de (6.4), tomando $g = 0$. Para poder aplicar (6.4) no es necesario que las funciones f y g sean positivas, basta con que se cumpla la condición (6.2). Debe resultar evidente que los segmentos verticales $x = a$ y $x = b$ de separación entre las dos funciones pueden degenerar en un punto.

Si la región R de la cual nos piden el área no es del tipo (6.2), entonces hemos de dividir el intervalo $[a, b]$ en varios, de forma que en cada uno de ellos se cumpla

$$f(x) \leq g(x) \text{ ó } g(x) \leq f(x)$$

y así poder aplicar (6.4). En concreto, sea

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

una partición de $[a, b]$, de forma tal que en cada subintervalo:

$$\forall x \in [x_{i-1}, x_i] \Longrightarrow f(x) \leq g(x) \text{ ó } g(x) \leq f(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

entonces

$$\mu(R) = \int_a^{x_1} \big|f(x) - g(x)\big| \, dx + \int_{x_1}^{x_2} \big|f(x) - g(x)\big| \, dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{b} \big|f(x) - g(x)\big| \, dx$$

o lo que es lo mismo

$$\mu(R) = \int_a^b \big|f(x) - g(x)\big| \, dx$$

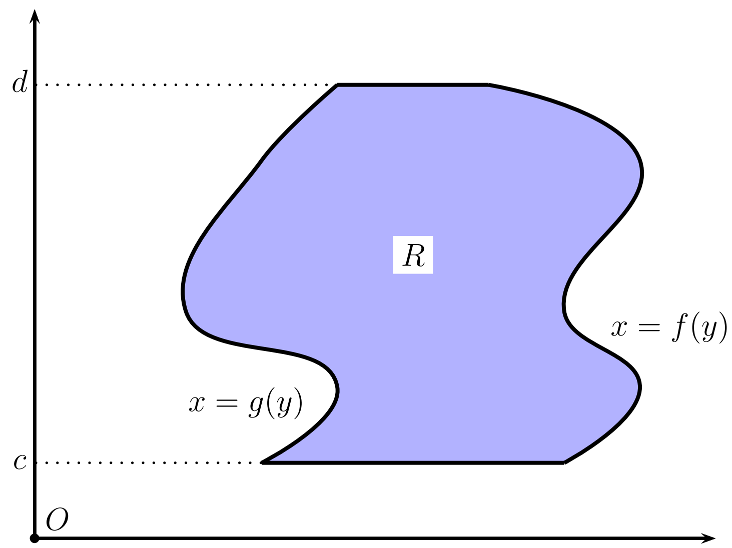
6.1.3. Área respecto al eje Y

Cambiando los papeles de las variables x e y, el área de la región

$$R \equiv \begin{cases} c \leq y \leq d \\ g(y) \leq x \leq f(y) \end{cases}$$

es el número

$$\mu(R) = \int_c^d \big[f(y) - g(y)\big] \, dy, \qquad \text{(ver siguiente figura)} \tag{6.5}$$



6.2. Problemas

Nota: Los problemas marcados con un asterisco ($\star$), significan que parte de la solución, generalmente un gráfico, está detallada en el archivo `graficos.pdf`.

1. Calcular las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll}
[1] \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 3x\, dx & [2] \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^3 + \operatorname{sen} 3x)\, dx & [3] \displaystyle\int_{2}^{3} \frac{x}{x^2-1}\, dx \\
[4] \displaystyle\int_{0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \operatorname{sen}(x^2)\, dx & [5] \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \cdot \cos(2x)\, dx & [6] \displaystyle\int_{0}^{1} x e^x\, dx \\
[7] \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx & [8] \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\, dx &
\end{array}$$

<u>Solución</u>:

$$\begin{array}{lllll}
[1]\ 0 & [2]\ 0 & [3]\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{3}\right) & [4]\ \frac{1}{2} & [5]\ -\frac{1}{3} \\
[6]\ 1 & [7]\ \frac{\pi}{2}-1 & [8]\ \ln 3 & &
\end{array}$$

2. Calcular, integrando por partes:

$$\int x^2 e^{-x}\, dx$$

y si definimos:

$$I(x) = \int_0^x t^2 e^{-t}\, dt$$

demostrar que $\lim\limits_{x\to\infty} I(x) = 2$

<u>Solución</u>: $-(x^2+2x+2)e^{-x} + C$

3. ($\star$)Se considera la función:

$$f(x) = |x^2 - 4x + 3|$$

a) Representarla gráficamente.

b) Calcular las derivadas laterales en el punto $x_0 = 3$

c) Calcular el área limitada por la gráfica de f y el eje OX.

Solución: $f'(3^-) = -2$, $f'(3^+) = 2$, $\frac{4}{3}$.

4. ($\star$)Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = -x^2 + 4x$, paralela a la cuerda que une los puntos de abscisas 0 y 2. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función y la cuerda citada.

   Solución: $y = 2x + 1$, $\frac{4}{3}$

5. ($\star$)Calcular el área finita, comprendida entre la recta $y = 1$ y las curvas $y = x^2$ e $y = \dfrac{8}{x}$.

   Solución: $16 \ln 2 - \frac{14}{3}$

6. Representar la función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

   Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. ¿Es aplicable **la regla de Barrow** para calcular $\displaystyle\int_{1}^{4} f(x)\,dx$?. Razonar la respuesta.

   Solución: $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$. No.

7. ($\star$)Calcular el área encerrada por la gráfica de

$$y = \frac{1}{4 + x^2}$$

   el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 2\sqrt{3}$

   Solución: $\frac{\pi}{24}$

8. ($\star$)Representar gráficamente la parte del plano comprendida entre la curva $y = \ln(x + 5)$ y las rectas $y = 0$, $x = -\frac{9}{2}$, $x = 1$. Calcular el valor de dicha área.

   Solución: $6 \ln 6 - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{9}{2}$

9. ($\star$)Hallar el área encerrada por la curva $y = \ln x$ entre el punto de corte con el eje OX y el punto de abscisa $x = e$.

   Solución: 1

10. ($\star$)Determinar el área encerrada entre las gráficas de las funciones:

$$y = 6x - x^2 \quad ; \quad y = x^2 - 2x$$

   Solución: $\frac{64}{3}$

11. Calcular

$$\int_0^1 (x^2 + 1)e^{-2x}\,dx$$

   Solución: $\frac{3-7e^{-2}}{4}$

12. ($\star$)Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = 2x - x^2$ y la recta $y = -x$.

   Solución: $\frac{9}{2}$

13. Sean
$$a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}^2 x \, dx \quad ; \quad b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \, dx$$
Calcular $a + b$ y $a - b$ y obtener los valores de a y b.
Solución: $a = \frac{\pi^2+4}{16}$, $b = \frac{\pi^2-4}{16}$

14. ($\star$)Calcular el área encerrada por la curva $y = x^2 - 4x$ y la recta $y = 2x - 5$.
Solución: $\frac{32}{3}$

15. Determinar a y b para que la siguiente función sea continua:
$$f(x) = \begin{cases} 2^x + a, & \text{si } x \leq -1 \\ ax + b, & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 3x^2 + 2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
Una vez calculados a, b, hallar el valor de la integral $\displaystyle\int_2^{-1} f(x)\, dx$
Solución: $a = \frac{3}{4}$, $b = 2$; $-\frac{109}{8}$

16. Representar la función:
$$f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2}$$
y calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$
Solución: $-6 - \ln 3$

17. Se considera la función:
$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$
    I) Representar la gráfica de f en un entorno de $x = 1$.
    II) Determinar máximos y mínimos de f.
    III) Descomponer f en fracciones simples.
    IV) Calcular $\displaystyle\int_2^3 f(x)\, dx$

Solución: $\left(3, \frac{27}{4}\right)$ mínimo; $f(x) = x + 2 + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$; $\int_2^3 f(x)\, dx = 5 + \ln 8$

18. ($\star$)Hallar el área comprendida entre la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX.
Solución: 8

19. Descomponer la función:
$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2 - 5x + 6}$$
en fracciones simples, calcular una primitiva y hallar el área limitada por la curva, el eje de abscisas y las rectas $x = 4$, $x = 6$.
Solución: Área $= 12 \ln 3 - 7 \ln 2 + 2$

20. ($\star$)Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$$

el eje de las x y las rectas $x = 1$, $x = \sqrt{3}$.

Solución: $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

21. ($\star$)Hallar el área de la figura comprendida entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$.

Solución: $\frac{9}{2}$

22. ($\star$)Hallar el área del recinto limitado por la parábola $y^2 - 2x = 0$ y la recta que une los puntos $(2, -2)$, $(4, 2\sqrt{2})$.

Solución: $\frac{14+10\sqrt{2}}{3}$

23. ($\star$)Calcular las áreas de los recintos determinados por las funciones

$$f(x) = 1 + x^5 \quad ; \quad g(x) = 3 - x$$

en el primer cuadrante.

Solución: $\frac{4}{3}$, $\frac{19}{6}$

24. ($\star$)Calcular el área limitada por las parábolas

$$y = x^2 \quad ; \quad y = \sqrt{x}$$

Solución: $\frac{1}{3}$

25. Hallar el área $A(\lambda)$ limitada por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

entre los valores $x = 1$ y $x = \lambda > 1$, y hallar el límite del área obtenida cuando $\lambda \to +\infty$.

Solución: $A(\lambda) = 2\sqrt{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda} - 3$; $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = +\infty$

26. ($\star$)Determinar el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 \ln x$, su tangente en el punto de abscisa e y el eje x.

Solución: $\frac{e^3+2}{18}$

27. ¿Es aplicable el **Teorema del valor medio del cálculo integral** a la función:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

en el intervalo $[0, 1]$?. En caso afirmativo, comprobarlo.

Solución: Sí. $c = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$

28. ¿Se puede calcular la siguiente integral?:

$$\int_0^2 f(x)\,dx \quad \text{siendo} \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x-2, & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Razónense las respuestas, y en caso afirmativo, calcular su valor.

Solución: Sí. 0

29. Sea $f(x) = |\cos x|$ definida en $[-\pi, \pi]$. ¿Es aplicable la fórmula del valor medio del cálculo integral?. En caso afirmativo, hallar el valor medio que aparece en la fórmula.

Solución: Sí. $c = \arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)$

30. ($\star$)Hallar el área del recinto plano limitado por la parábola de ecuación

$$y = 4x - x^2$$

y las rectas tangentes a dicha curva en sus puntos de intersección con el eje OX.

Solución: $\frac{16}{3}$

31. ($\star$)Calcular el área de la región del semiplano $y \ge 0$ limitado por la curva $y = \ln x$, su tangente en $x = 1$ y la recta $x = 3$.

Solución: $4 - 3\ln 3$

32. ($\star$)Hallar el área limitada por las curvas:

$$y^2 = x \quad ; \quad y = |x-2|$$

Solución: $\frac{13}{6}$

33. Sea la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{si } -1 < x < 1 \\ e^{-x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   I) ¿Es posible definir f en -1 para que sea derivable en ese punto?.
   II) Determinar las regiones de crecimiento y de decrecimiento de f así como sus asíntotas y hacer un esbozo de su gráfica.
   III) Para $t \in]-1, 1[$, calcular $g(t) = \int_{-1}^{t} f(x)\,dx$.
   IV) Calcular $\lim_{t \to -1^-} g(t)$.

Solución: No; $g(t) = \operatorname{arc\,sen} t - \sqrt{1-t^2} + \frac{\pi}{2}$; 0.

34. Determinar una función continua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y un punto a tales que:

$$\int_a^x f(t)\,dt = 5x^3 + 40$$

Solución: $f(x) = 15x^2$, $a = -2$

35. Si $a \in]0,1[$, la ecuación
$$f_a(x) = \frac{1-a}{a^2}x^2$$
representa una parábola que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(a, 1-a)$. Calcular el área $S(a)$ de la región limitada por la gráfica de la parábola, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = a$. ¿Para qué valor de a el área $S(a)$ es máxima?.

    Solución: a) $S(a) = \frac{1}{3}(a - a^2)$, $a = \frac{1}{2}$.

36. Sean las funciones $f(x) = x^2 \cdot e^{-ax}$, $g(x) = x^2$. Calcular:

    I) $\displaystyle\int_0^1 [g(x) - f(x)]\, dx$

    II) Determinar los puntos en los que $f(x)$ y $g(x)$ tienen la misma pendiente.

    Solución: $\frac{1}{3} + \frac{e^{-a}}{a} + \frac{2e^{-a}}{a^2} + \frac{2e^{-a}}{a^3} - \frac{2}{a^3}$; $x = 0$.

37. De una función integrable $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ se sabe que para cada x en dicho intervalo se tiene
$$|f(x)| \leq 1 + x^2$$
De los números $-3, -2, -1, 2'5$ y $2'75$, ¿cuáles pueden ser el valor de la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$?. Justificar la respuesta.

    Solución: el segundo, el tercero o el cuarto.

38. Las coordenadas (a, b) del centro de gravedad de una lámina de densidad uniforme que está limitada por la curva $y = \operatorname{sen}(t)$ y la porción del eje OX comprendida entre $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$, vienen dadas por
$$a = \frac{\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\, dx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx} \quad \text{y} \quad b = \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx}{2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx}$$

    (1) Describir el método de integración por partes.

    (2) Utilizar dicho método para calcular el centro de gravedad de la lámina.

    Solución: $\left(1, \dfrac{\pi}{8}\right)$.

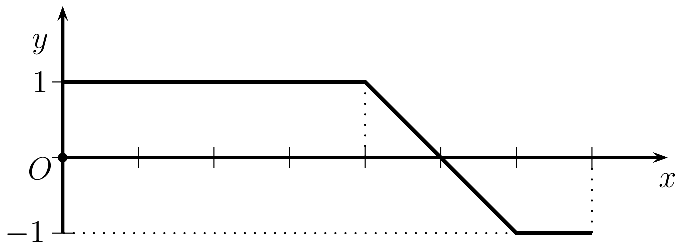
39. ($\star$)Dibujar el recinto limitado por las curvas de ecuaciones
$$y = \operatorname{sen} x, \quad y = \cos x, \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = \frac{\pi}{3}$$
y hallar su área.

    Solución: $2\sqrt{2} - \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

40. ($\star$)Dibuja y calcula el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = \dfrac{2}{1+x^2}$ y las rectas de ecuaciones $x = 1$ e $y = 3x + 2$.

    Solución: $\dfrac{7-\pi}{2}$.

41. La figura siguiente representa la gráfica de una función $f : [0, 7] \longrightarrow \mathbb{R}$



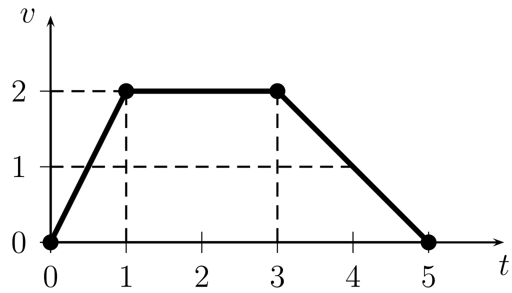
Sea $F : [0, 7] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$

(I) Calcular $F(x)$, $F(4)$ y $F(7)$.

(II) Dibujar la gráfica de F.

Solución: $F(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ -\dfrac{x^2}{2} + 5x - 8, & \text{si } 4 \le x \le 6 \\ 10 - x, & \text{si } 6 \le x \le 7 \end{cases}$; $F(4) = 4,\ F(7) = 3.$

42. La velocidad de un móvil que parte del origen viene dada en m/s, por la siguiente gráfica:



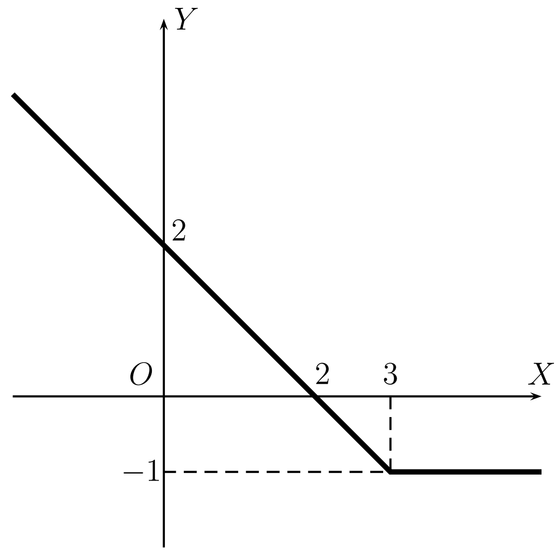
(I) Calcular la función espacio recorrido.

(II) Dibujar la gráfica de la función espacio recorrido.

(III) Probar que el área bajo la curva que da la velocidad coincide con el espacio total recorrido.

Solución: $e(t) = \begin{cases} t^2, & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ 2t - 1, & \text{si } 1 \le t \le 3 \\ -\dfrac{t^2}{2} + 5t - \dfrac{11}{2}, & \text{si } 3 \le t \le 5 \end{cases}$

43. La función derivada de una función derivable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ viene dada por la gráfica de la siguiente figura. Además, se sabe que $f(-1) = 9/2$



Calcular $f(x)$ y $\lim_{x\to 3} f(x)$

Solución: $f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} + 7, & \text{si } x \leq 3 \\ -x + \dfrac{23}{2}, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$; $\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{17}{2}$.

44. ($\star$)Dibujar y calcular el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = x^3 - 2x$$

Solución: $\frac{37}{12}$

45. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq 0 \\ x \operatorname{sen} x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Estudiar la derivabilidad de f y calcular $\int_{-1}^{\pi/2} 2f(x)\,dx$

Solución: f es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$; $\int_{-1}^{\pi/2} 2f(x)\,dx = 1$

46. ($\star$)Dibujar y calcular el área del recinto limitado por la recta $y + x = 0$ y la curva de ecuación $y = x^2 + 4x + 4$.

Solución: $\frac{9}{2}$

47. ($\star$)Sean las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas como

$$f(x) = x^2 + 3x + 2 \qquad g(x) = -x^2 - 3x + 10$$

Representarlas gráficamente y hallar el área de la región del plano que está formada por los puntos (x, y) que cumplen $f(x) \leq y \leq g(x)$.

Solución: $\frac{125}{3}$

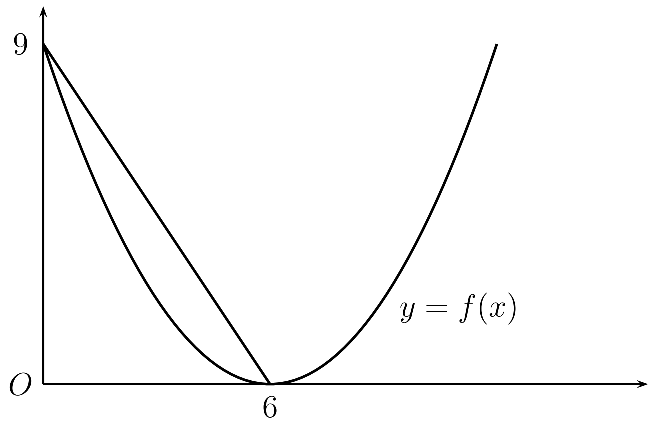
48. De las funciones continuas $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se sabe que

$$\int_1^2 \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = 3, \quad \int_2^3 3\big(f(x)-g(x)\big)\,dx = 3, \quad \int_1^3 f(x)\,dx = 3, \quad \int_1^2 2f(x)\,dx = 3,$$

Calcular, si es posible $\int_1^3 g(x)\,dx$ y, si no es posible, decir por qué.

Solución: Sí es posible y $\int_1^3 g(x)\,dx = 2$.

49. La gráfica de la función f de la figura corresponde a una función polinómica de grado 2.



Hallar la expresión algebraica de f y el área encerrada entre la recta y la curva.

Solución: $f(x) = \frac{(x-6)^2}{4}$, Superficie $= 9$.

50. Haciendo el cambio de variable $t = e^x$, calcular

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2}\,dx$$

Solución: $\ln\left[\frac{3(e+1)}{2(e+2)}\right]$

51. ($\star$)Dibujar el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las curvas

$$y = x^2 + 1, \quad y = \frac{2}{x} \quad \text{e} \quad y = x - 1$$

y hallar su área.

Solución: $S = 2\ln 2 + \frac{5}{6}$

52. Calcular la siguiente integral definida

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$$

¿Qué representa geométricamente?.

Solución: $S = \ln 3 - \frac{\ln 5}{2}$

53. Calcular el valor de la integral

$$\int_{-1}^3 (x^2 + 5)e^x\,dx$$

Solución: $10e^3 - \frac{10}{e}$

54. Sea $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t})\, dt$$

Determinar $F(1)$ y hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución: $F(1) = \frac{5}{3}$, $y = 3x - \frac{4}{3}$

55. ($\star$)Consideremos las funciones $f, g : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad g(x) = \operatorname{sen}(2x)$$

Dibujar el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y hallar su área.

Solución: 8

56. Se quiere dividir la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$ en dos regiones de igual área mediante una recta $y = a$. Hallar el valor de a.

Solución: $a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

57. ($\star$)Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 10, & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 2x + 2, & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Esbozar la gráfica de f y calcular el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta $x = 3$.

Solución: $a = \frac{71}{6}$

58. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = |x^2 - 1|$

   a) Esbozar la gráfica de f.

   b) Estudiar la derivabilidad de f.

   c) Calcular $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$.

Solución: f es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$; 2

59. Siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x, se considera la función $f :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a(x - 1), & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x \ln(x), & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determinar el valor de a sabiendo que f es derivable y calcular $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$.

Solución: $a = 1$, $2 \ln 2 - \frac{5}{4}$

60. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x$.

   a) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) Hallar los extremos relativos α y β de f con $\alpha < \beta$ y calcular $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

Solución: f decrece en $]-\infty,-2[\cup]-1,+\infty[$ y crece en $]-2,-1[$, $\alpha=-2$ es un mínimo local, $\beta=-1$ es un máximo local, $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \frac{9}{2}$

61. Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & \text{si } x<0\\ 1-mx-x^2, & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

Determinar m sabiendo que f es derivable y calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Solución: $m=-1$, $\frac{7}{6}+\ln 2$

62. ($\star$)Consideremos la función $f:[0,4]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}4x, & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ \dfrac{16}{(x+1)^2}, & \text{si } 1<x<3\\ 4-x, & \text{si } 3\leq x\leq 4\end{cases}$$

Esbozar la gráfica de f y hallar el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución: $\frac{13}{2}$

63. ($\star$)Dibujar y calcular el área del recinto limitado por la curva $y=\dfrac{1}{2}+\cos(x)$, los ejes de coordenadas y la recta $x=\pi$

Solución: $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

64. ($\star$)**Selectividad Junio 2000**. Dibujar el recinto limitado por las curvas

$$y=e^{x+2},\quad y=e^{-x},\quad x=0$$

y hallar su área.

Solución: superficie $=(e-1)^2$.

65. **Selectividad Septiembre 2000**. Consideremos la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2+x-x^2$. Calcular α, $\alpha<2$, de forma que

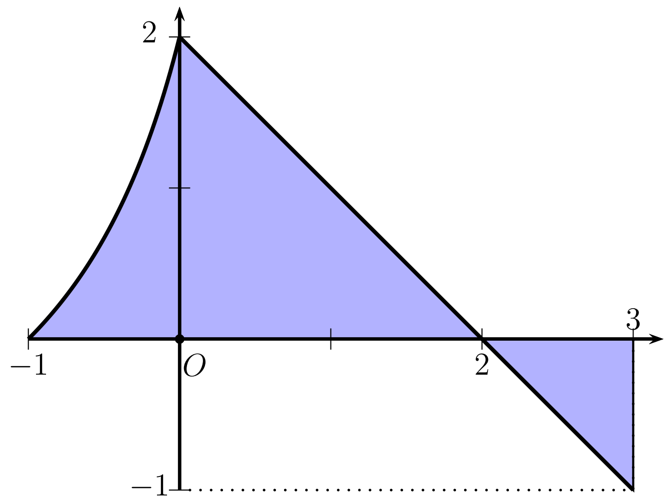
$$\int_\alpha^2 f(x)=\frac{9}{2}$$

Solución: $\alpha=-1$.

66. **Selectividad Septiembre 2000**. Calcular el valor de α, positivo, para que el área encerrada entre la curva $y=\alpha x-x^2$ y el eje de abscisas sea 36. Representar la curva que se obtiene para dicho valor de α.

Solución: $\alpha=6$.

67. **Selectividad Junio 2001**. Hallar el área del recinto sombreado que aparece en la siguiente figura, sabiendo que la parte curva tiene como ecuación $y = \dfrac{2x+2}{1-x}$



Solución: $S = 4\ln 2 + \frac{1}{2}$.

68. ($\star$)**Selectividad Junio 2002**. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = xe^{-x}$. Esbozar el recinto limitado por la curva $y = f(x)$, los ejes coordenados y la recta $x = -1$. Calcular su área.

Solución: 1

69. **Selectividad Junio 2002**. Determinar un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que

$$P(0) = P(2) = 1 \quad \text{y} \quad \int_0^2 P(x)\,dx = \frac{1}{3}$$

Solución: $P(x) = \frac{5x^2-10x+4}{4}$

70. **Selectividad Junio 2003**. Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 0$ y que su gráfica tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = -1$. Conociendo además que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 6$, hallar a, b y c.

Solución: $a = 3$, $b = 0$, $c = \frac{19}{4}$.

71. ($\star$)**Selectividad Junio 2003**. Dada la parábola de ecuación $y = 1 + x^2$ y la recta de ecuación $y = 1 + x$, se pide

    a) Área de la región limitada por la recta y la parábola.

    b) Ecuación de la recta paralela a la dada que es tangente a la parábola.

Solución: Superficie $= \frac{1}{6}$, $y = x + \frac{3}{4}$.

72. ($\star$)**Selectividad Septiembre 2003**. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{x/3}$.

    a) ¿En qué punto de la gráfica de f, la recta tangente a ésta pasa por el origen de coordenadas?. Hallar la ecuación de dicha recta tangente.

b) Calcular el área del recinto acotado que está limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.

Solución: $(3, e)$, $y = \dfrac{ex}{3}$; Superficie $= \dfrac{3e}{2} - 3$

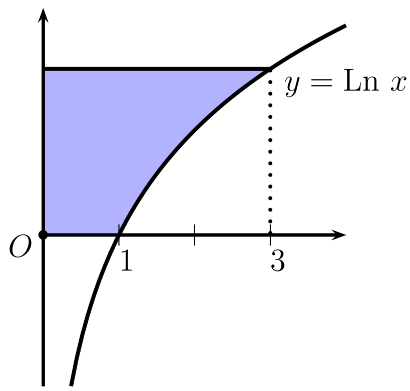
73. **Selectividad junio 2004**. Determinar b sabiendo que $b > 0$ y que el área de la región limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = bx$ es igual a $\dfrac{9}{2}$.

    Solución: $b = 3$

74. ($\star$)**Selectividad septiembre 2004**. Calcular el área del recinto acotado que está limitado por la recta $y = 2x$ y por las curvas $y = x^2$ e $y = \dfrac{x^2}{2}$.

    Solución: 4.

75. **Selectividad septiembre 2004**. Siendo $\operatorname{Ln} x$ el logaritmo neperiano de x, hallar el área de la superficie sombreada:

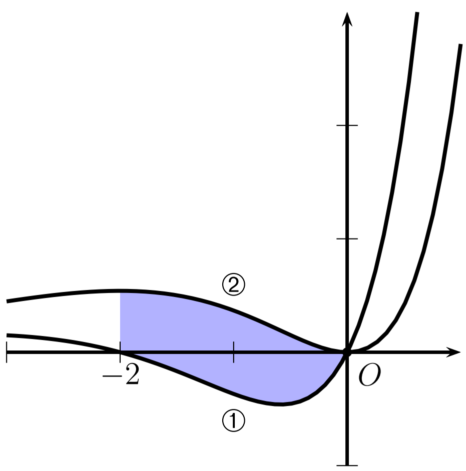


    Solución: 2.

76. **Selectividad junio 2005**. Se sabe que las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 e^x$ y a su función derivada f'.

    a) Indicar, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de f'.

    b) Calcular el área de la región sombreada.



Solución: la gráfica de f es la etiquetada como ②. superficie $= 2 - \dfrac{6}{e^2}$.

77. $(\star)$**Selectividad junio 2005**. Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x/2}$.

    a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.
    b) Calcular el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f, la recta de ecuación $x = 2$ y la recta tangente obtenida en a).

    Solución: $y = 1 - \dfrac{x}{2}$, superficie $= 1 - \dfrac{2}{e}$

78. **Selectividad septiembre 2005**. De una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f(0) = 2$ y que $f'(x) = 2x$.

    a) Determinar f.
    b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de f, por el eje de abscisas y por las rectas de ecuaciones $x = -2$ y $x = 2$.

    Solución: $f(x) = x^2 + 2$, superficie $= \dfrac{40}{3}$

79. **Selectividad septiembre 2005**. Considerar la integral definida:

$$I = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x} - 1}\, dx$$

    a) Expresarla mediante el cambio de variable $\sqrt{1+x} - 1 = t$.
    b) Calcular I.

    Solución: $I = 2\displaystyle\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = 2(1 + \ln 2)$

80. **Selectividad junio 2006**. Sea

$$I = \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$$

    a) Expresar I mediante el cambio de variable $t^2 = 1 + x^2$.
    b) Calcular el valor de I.

    Solución: $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{5}} (t^2 - 1)\, dt = \frac{2}{3}\left(1 + \sqrt{5}\right)$

81. **Selectividad junio 2006**. El área del recinto limitado por las curvas

$$y = \frac{x^2}{a}, \quad y = \sqrt{ax}$$

    con $a > 0$ vale 3. Calcular el valor de a.

    Solución: $a = 3$.

82. $(\star)$**Selectividad junio 2007**. Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante $f(x) = x^3 + 3x^2$, $g(x) = x + 3$.

a) Esbozar las gráficas de f y de g calculando sus puntos de corte.

b) Calcular el área de cada uno de los recintos limitados entre las gráficas de f y g.

Solución: puntos comunes: $(-3,0)$, $(-1,2)$, $(1,4)$; b) $S_1 = S_2 = 4$.

83. ($\star$)**Selectividad septiembre 2007**. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = x|x-2|$$

a) Estudiar la derivabilidad de f en $x = 2$.

b) Esbozar la gráfica de f.

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas

Solución: f no es derivable en $x = 2$; superficie $= \frac{4}{3}$

84. ($\star$)**Selectividad septiembre 2007**. Sea $f :]-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \ln(x+1), \quad \text{(ln denota la función logaritmo neperiano)}$$

a) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y la recta $x = 1$.

Solución: $y = x$; superficie $= \frac{3}{2} - 2\ln 2$

85. **Selectividad junio 2008**. Calcular

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x^2-x)(x-1)}\, dx$$

Solución: $\dfrac{1}{6} + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$

86. ($\star$)**Selectividad junio 2008**. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{-2x}$.

a) Justificar que la recta de ecuación $y = -2ex$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -\frac{1}{2}$.

b) Calcular el área el recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior.

Solución: $\dfrac{e}{4} - \dfrac{1}{2}$

87. **Selectividad septiembre 2008**. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2x + |x^2 - 1|$.

a) Esboza la gráfica de g.

b) Calcular $\displaystyle\int_0^2 g(x)\, dx$.

Solución: 6.

88. ($\star$)**Selectividad septiembre 2008**. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 2x + 2$$

a) Esbozar las gráficas de f y g.

b) Calcular el área del recinto limitado por dichas gráficas.

Solución: $\frac{32}{3}$.

89. ($\star$)**Selectividad junio 2009**. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = x|x - 1|$$

a) Esbozar la gráfica de f.

b) Comprobar que la recta de ecuación $y = x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

c) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f y la de dicha tangente.

Solución: área $= 1$

90. ($\star$)**Selectividad junio 2009**. Considerar la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$.

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = -1$.

b) Calcular el área del recinto limitado por la curva dada y la recta $y = 2$.

Solución: Recta tangente $\equiv y = 2$, Área $= \frac{27}{4}$

91. ($\star$)**Selectividad septiembre 2009**. La curva $y = \dfrac{x^2}{2}$ divide al rectángulo R de vértices $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (2, 1)$ y $D = (0, 1)$ en dos recintos.

a) Dibujar dichos recintos.

b) Hallar el área de cada uno de ellos.

Solución: sean S_1 el recinto situado encima de la parábola y contenido en R, y S_2 el complementario de S_1 respecto de R, entonces:

$$\text{superficie de } S_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$\text{superficie de } S_2 = \frac{2(3 - \sqrt{2})}{3}$$

92. **Selectividad junio 2010**. Calcular

$$\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}(\sqrt{x})\, dx$$

Sugerencia: efectuar el cambio $\sqrt{x} = t$.

Solución: 2π.

93. ($\star$)**Selectividad junio 2010**. Sean las funciones:

$$f(x) = 5 - x, \quad g(x) = \frac{4}{x}, \text{ para } x \neq 0$$

a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g indicando sus puntos de corte.

b) Calcular el área de dicho recinto.

Solución: Área $= \frac{15}{2} - 8\ln 2$

94. ($\star$)**Selectividad septiembre 2010**. Consideremos la funcion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 4$.

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Esbozar el recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta de ecuación $y = 2x + 3$. Calcular su área.

Solución: $y = 2x + 3$, Área $= \dfrac{1}{3}$

95. ($\star$)**Selectividad junio 2011**. Sea $f :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x+1)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.

a) Esbozar el recinto limitado por la gráfica de f, el eje OY y la recta $y = 1$. Calcular los puntos de corte de las gráficas.

b) Hallar el área del recinto anterior.

Solución: Superficie $= e - 2$.

96. ($\star$)**Selectividad septiembre 2011**. Consideremos las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = 6x - x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 2x$$

- Esbozar sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcular sus puntos de corte.
- Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Solución: Superficie $= \frac{64}{3}$.

Nota: este problema es idéntico al 10.

97. ($\star$)**Selectividad septiembre 2011**. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por:

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + 4, \quad g(x) = x^2 - 1$$

- Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$.
- Esbozar el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta $y = x + 5$. Calcular el área de este recinto.

Solución: recta tangente $\equiv y = x + 5$, Superficie $= \frac{15}{2}$.

98. **Selectividad junio 2012**. Sea f una función continua en el intervalo $[2, 3]$ y F una función primitiva de f tal que $F(2) = 1$ y $F(3) = 2$. Calcular:

a) $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_2^3 (5f(x)-7)\,dx$

c) $\displaystyle\int_2^3 (F(x))^2\,f(x)\,dx$

Solución: $1,\ -2,\ \dfrac{7}{3}$.

99. **Selectividad junio 2012**. Sea la función f definida por $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$, para $x \neq -1, 1$.

a) Hallar una primitiva F de f.

b) Calcular el valor de k para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de f en el intervalo $[2,k]$ sea $\ln 2$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

Solución: $F(x) = \ln\left(\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\right) + C$, C constante arbitraria; $k = 5$

100. **Selectividad septiembre 2012**. Sea

$$I = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}\,dx$$

a) Expresar la integral I aplicando el cambio de variable $t = \sqrt{1-x}$.

b) Calcular el valor de I.

Solución: $I = 2\displaystyle\int_0^1 t(1-t)\,dt = \dfrac{1}{3}$

101. ($\star$)**Selectividad septiembre 2012**. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{9-x^2}{4}$$

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Esbozar el recinto limitado por la gráfica de f, la recta $x+2y = 5$ y el eje de abscisas. Calcular el área de dicho recinto.

Solución: recta tangente $\equiv y = \dfrac{5-x}{2}$, área $= \dfrac{5}{3}$

Parte II

Álgebra Lineal

Capítulo 7

Espacios vectoriales

1. Determinar si los vectores:

$$\vec{a} = (1, 2, 1), \vec{b} = (-3, 8, 1), \vec{c} = (3, -1, 1)$$

son linealmente dependientes. En caso de serlo, hállese la relación de dependencia.
Solución: Son dependientes; $3\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{c}$

2. Estudiar la dependencia o independencia de los vectores:

$$\vec{a} = (1, 0, 0), \vec{b} = (0, 1, 1), \vec{c} = (0, 0, 1)$$

Solución: Son independientes.

3. Determinar si los vectores:

$$\vec{a} = (1, 1, 1), \vec{b} = (2, 3, 4), \vec{c} = (0, 1, 2)$$

son linealmente dependientes. En caso de serlo, hállese la relación de dependencia.
Solución: Son dependientes; $-2\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

4. Determinar m para que los vectores:

$$\vec{a} = (-1, 1, 3), \vec{b} = (5, -2, 9), \vec{c} = (2, -m, 2m)$$

sean dependientes. Hállese la relación de dependencia.
Solución: $m = 1$; $\vec{a} + 3\vec{c} = \vec{b}$

5. Determinar λ para que los vectores:

$$\vec{a} = (-1, 4, 2), \vec{b} = (3, \lambda, -2), \vec{c} = (2, 5, 6)$$

estén en un mismo plano.
Solución: $\lambda = -34/5$

6. Se sabe que $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son linealmente dependientes:

   I) ¿Se puede asegurar que $\vec{a}$ es combinación de los otros dos?.
   II) ¿Se puede asegurar que $\vec{b}$ es combinación de los otros dos?.

III) ¿Y el $\vec{c}$?.

IV) ¿Se puede asegurar que uno de los tres es combinación lineal de los otros dos?.

Solución: No,No,No,Sí.

7. En $\mathbb{R}^6$ se dan los vectores:

$$\vec{u_1} = (0,1,-1,2,0,1), \vec{u_2} = (0,1,-1,2,1,5)$$
$$\vec{u_3} = (1,4,0,3,6,-1), \vec{u_4} = (2,0,3,-2,1,1)$$

Averiguar si tales vectores forman un *sistema libre*.

Solución: Sí.

8. En $\mathbb{R}^3$ se dan los vectores:

$$\vec{u_1} = (2,1,0), \vec{u_2} = (0,2,1), \vec{u_3} = (2,-1,-1), \vec{u_4} = (4,0,-1)$$

Hay una razón por la que son dependientes. ¿Cuál es?. Averiguar también cuántos de los cuatro son independientes y qué relaciones de dependencia se dan entre ellos. ¿Qué subespacio de $\mathbb{R}^3$ generan?.

Solución: $\vec{u_3} = \vec{u_1} - \vec{u_2}$; $\vec{u_4} = 2\vec{u_1} - \vec{u_2}$; un subespacio vectorial de dimensión 2.

9. Sea $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}, N = \{(x,y,z) \in R^3 \mid x+y+z = 1\}$. Uno de estos dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ es subespacio vectorial y el otro no lo es. Compruébese esto último.

Solución: El primero Sí, el segundo No.

10. En los siguientes casos comprobar que los sistemas de vectores son linealmente dependientes. Hállese una relación de dependencia y el rango del mismo.

$$S = \{(1,0,5,3), (3,1,-1,-1), (0,1,2,1), (7,1,1,0)\}$$
$$S = \{(1,0,3,1), (0,0,1,1), (1,3,0,1), (7,2,4,1), (1,1,1,1)\}$$
$$S = \{(5,2,-3,1), (4,1,-2,3), (1,1,-1,-2)\}$$

Solución: $\vec{u_4} = \vec{u_1} + 2\vec{u_2} - \vec{u_3}$, $r = 3$; $-\vec{u_1} + 18\vec{u_2} + 7\vec{u_3} + 3\vec{u_4} = 27\vec{u_5}$, $r = 4$; $\vec{u_1} - \vec{u_2} = \vec{u_3}$, $r = 2$

11. Probar que los vectores $\vec{u_1} = (1,2,3)$, $\vec{u_2} = (-1,5,0)$, $\vec{u_3} = (3,2,1)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ y hállense las componentes en esa base del vector $\vec{x} = (7,19,-2)$.

Solución: $\vec{x} = -2\vec{u_1} + 3\vec{u_2} + 4\vec{u_3}$

12. Sea $H = \langle \vec{u_1} = (-2,1,1), \vec{u_2} = (1,-4,5), \vec{u_3} = (-4,-5,13) \rangle$.

   a) Hallar una base de H y su dimensión.

   b) Averiguar si alguno de los vectores $\vec{x} = (2,0,4)$, $\vec{y} = (1,-11,16)$ pertenece a H.

Solución: $B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$, dim $H = 2$; $\vec{x} \notin H$, $\vec{y} \in H$ ya que $\vec{y} = \vec{u_1} + 3\vec{u_2}$.

13. Sean:

$$F = \langle \vec{u_1} = (-1,2,3), \vec{u_2} = (2,0,1) \rangle$$
$$G = \langle \vec{v_1} = (0,4,7), \vec{v_2} = (-1,10,17) \rangle$$

Probar que $F = G$.

14. Hállese la dimensión y una base del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores:

$$(1,0,0,-1),(2,1,1,0),(1,1,1,1),(1,2,3,4),(0,1,2,3)$$

Solución: dimensión $= 3$, $B = \{(1,0,0,-1),(1,1,1,1),(1,2,3,4)\}$.

15. Hallar x e y para que los siguientes vectores sean linealmente dependientes:

$$(-1,2,0,x),(3,-2,x,y),(1,2,2,1)$$

Solución: $x = 2, y = -3$.

16. De los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ averiguar cuáles son subespacios vectoriales:

$$\begin{aligned}
H &= \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x\cdot y\cdot z = 1\}\\
H &= \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}\\
H &= \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}\\
H &= \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x\cdot y = 0\}\\
H &= \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}\\
H &= \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 10\}\\
H &= \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\}\\
H &= \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 0\}
\end{aligned}$$

Solución: No, Sí, Sí, No, Sí, No, Sí, Sí.

17. De los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ averiguar cuáles son bases:

$$\begin{aligned}
B &= \{\,(-2,3,0),(3,-1,2),(-1,5,2)\,\}\\
B &= \{\,(-1,2,1),(2,4,0),(5,1,1)\,\}
\end{aligned}$$

Solución: No, Sí.

18. Dados los vectores $\vec{v_1} = (1,1,0,a)$, $\vec{v_2} = (3,-1,b,-1)$, $\vec{v_3} = (-3,5,a,-4)$ de $\mathbb{R}^4$, determinar los valores de a y b para que sean linealmente dependientes. Hallar la relación de dependencia.

Solución: $a = -2, b = 1$; $\vec{v_3} = 3\vec{v_1} - 2\vec{v_2}$.

19. Dados los vectores $\{\,(4,-5,7),(3,-3,4),(1,1,-2),(2,-1,1)\,\}$, determinar un sistema mínimo de generadores del subespacio al que pertenecen y comprobar si dicho subespacio es idéntico al engendrado por $\{\,(1,-2,3),(3,0,-1)\,\}$.

Solución: $\{\,(4,-5,7),(3,-3,4)\,\}$. Sí.

20. Dados los vectores $\{\,(m,-1,0,1),(0,m,-1,1),(1,0,-1,2)\,\}$, determinar los valores de m para que dichos vectores sean linealmente independientes.

Solución: $m \neq 1$.

21. Dados los vectores $\vec{a} = (a,8,4)$, $\vec{b} = (-1,2,0)$ y $\vec{c} = (0,1,2)$, hallar a para que $\vec{a}$ se pueda expresar como una combinación lineal de $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Solución: $a = -3$.

22. Determinar los valores de a y b para que el vector $(1,4,a,b)$ esté en el subespacio engendrado por los vectores:
$$(1,2,-1,2) \quad ; \quad (0,1,2,1)$$
Solución: $a=3, b=4$.

23. Hallar el rango de los siguientes sistemas de vectores:
    - $(1,2,3),(2,3,1),(3,4,5),(2,4,6)$
    - $(1,2),(2,3),(0,1)$

    Solución: $r=3$; $r=2$.

24. Determinar el valor de t para que el vector $(3,8,t)$ esté en el subespacio engendrado por los vectores:
$$(1,2,3) \quad ; \quad (1,3,-1)$$
Solución: $t=1$.

25. Escribir el vector $\vec{b}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, siendo:
$$\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix}, \quad \vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}, \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\-7\\7\end{pmatrix}$$
Solución: $\vec{b}=2\vec{u}-\vec{v}+3\vec{w}$.

26. **Selectividad septiembre 2007**. Considerar los vectores $\vec{u}=(1,1,m)$, $\vec{v}=(0,m,-1)$ y $\vec{w}=(1,2m,0)$.
    a) Determinar el valor de m para que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.
    b) Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, expresar el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

    Solución: $m=1$, $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$.

Capítulo 8

Matrices

1. Determinar dos matrices A y B tales que:

$$3A - 5B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad -A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>: $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 39 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 17 & 1 \end{pmatrix}$

2. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular:

$$\begin{array}{lllll} A + B - C & ; & A - B + C & ; & A - B - C \\ 2A - 3B & ; & 3B - 5A & ; & A - (B - 2C) \end{array}$$

3. Hallar la matriz M que satisface la igualdad:

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} + M$$

<u>Solución</u>: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular $A(B + C)$, AB^τ, $B^\tau A$, $A(3B - 2C)$, A^2

<u>Solución</u>:

$$\begin{pmatrix} 51 & 50 & 64 \\ 45 & 28 & 48 \\ 24 & 37 & 60 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 24 & 31 \\ 7 & 26 & 25 \\ -4 & 23 & 40 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 36 & 4 & 16 \\ 7 & 3 & 5 \\ 35 & 25 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 18 & -65 & 67 \\ 70 & -21 & 69 \\ -48 & -69 & -40 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 26 & 30 & 28 \\ 30 & 14 & 18 \\ 24 & 30 & 13 \end{pmatrix}$$

5. Dadas las matrices:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$
Resolver el sistema matricial:
$$5X + 3Y = A$$
$$3X + 2Y = B$$
y calcular $X^2 + Y^2$.

Solución:
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad X^2 + Y^2 = \begin{pmatrix} -14 & 17 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}$$

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de coeficientes reales, hallar x e y para que se verifique:
$$A^2 = xA + yI$$
siendo I la matriz unidad de orden 2, es decir: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: Si $b \neq 0$ o $c \neq 0$, entonces $x = a + d$, $y = bc - ad$. Si $b = c = 0$ entonces $a = d$, $x =$ cualquier número real, $y = a(a - x)$.

7. Demostrar que las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$ conmutan.

8. Probar que para cualquier matriz cuadrada A, la matriz $A \cdot A^\tau$ es simétrica.

9. ¿Por qué hay que premultiplicar a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ para que resulte $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$,

Solución: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Escribir como producto de matrices la matriz $\begin{pmatrix} ax & by \\ cx & dy \end{pmatrix}$.

11. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda \end{pmatrix}$, determinar todas las matrices B de dimensión 2×2 tales que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, obteniendo el valor de λ para que exista solución.

Solución: Sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si $a = b = c = d = 0$, entonces λ puede ser cualquiera. En caso contrario, es $\lambda = 6$ y $B = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$.

12. Sea A una matriz cuadrada idempotente ($A^2 = A$). Demostrar que si $B = 2A - I$, es $B^2 = I$.

13. Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$$

en la que se verifica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, calcular M^2, $P = M^2 + I$, PM y comprobar que P es idempotente.

14. Obtener todas las matrices cuadradas de segundo orden A tales que $A^2 = I$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

siendo a, b, c cualesquiera números reales.

15. Calcular las potencias sucesivas de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

16. Hallar el rango de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \text{ según } t$$

Solución: $r = 2$; $r = 2$; $r = \begin{cases} 1, & \text{si } t = 4 \\ 2, & \text{si } t \neq 4 \end{cases}$

17. Discutir el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

según los valores de a.

Solución: $r = \begin{cases} 2, & \text{si } a = 3 \\ 4, & \text{si } a \neq 3 \end{cases}$

18. Calcular el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & t & 0 \\ 4 & -6 & 8 & -2 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

según los valores de t.

Solución: $r(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } t = 0 \\ 2, & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$

19. Una matriz cuadrada M es ortogonal si cumple $M^\tau \cdot M = I$ donde I es la matriz identidad y M^τ es la traspuesta de M. Determinar si la siguiente matriz es ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución: No

20. Hallar el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

según los valores de a, b, c.

Solución: $r = \begin{cases} 1, & \text{si } a = b = c \\ 2, & \text{en caso contrario} \end{cases}$

21. Resolver la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = -\frac{5}{4}$, $y = -\frac{7}{4}$

22. Calcular el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 10 & 13 & 11 \end{pmatrix}$$

Solución: $r = 3$

23. Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n y B^n por inducción respecto a n.

Solución: $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \quad ; \quad B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

24. ¿Es posible que para dos matrices A y B no cuadradas, puedan existir $A \cdot B$ y $B \cdot A$?.

Solución: Sí.

25. Hallar todas las matrices simétricas de orden 2 tales que $A^2 = A$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a & \sqrt{a-a^2} \\ \sqrt{a-a^2} & 1-a \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a & -\sqrt{a-a^2} \\ -\sqrt{a-a^2} & 1-a \end{pmatrix}$$

para todo $a \in [0, 1]$.

26. Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar todas las matrices B de segundo orden tales que $A \cdot B = B \cdot A$

    Solución: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, siendo a, b cualquier par de números reales.

27. Hallar el rango de las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 2 & 7 & 12 & 17 \\ 3 & 8 & 13 & 18 \\ 4 & 9 & 14 & 19 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & a \end{pmatrix} \text{ según los valores de } a$$

    Solución: 3, 2, 4, $r = \begin{cases} 2, & \text{si } a = -6 \\ 3, & \text{si } a \neq -6 \end{cases}$, leídos de izquierda a derecha, arriba y abajo.

28. Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, ¿es cierta en general la relación $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?. Justificar la respuesta.

    Solución: No.

29. Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden que tienen inversa. Razonar si el producto $A \cdot B$ también tiene inversa.

    Solución: Sí, pues $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

30. **Selectividad Junio 2001**. Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

    a) Siendo I la matriz identidad 3×3 y O la matriz nula 3×3, probar que $A^3 + I = O$.

    b) Calcular A^{10}.

    Solución: $A^{10} = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

Capítulo 9

Determinantes y Matrices Inversas

9.1. Determinantes

1. Calcular:
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 7 & 2 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$
Solución: 1, 0, 0

2. Calcular:
$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$$
Solución: $2a^2(x+a)$

3. Calcular:
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 7 & 9 & 8 \\ 17 & 5 & 6 & 4 \\ 3 & 11 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$
Solución: -6, -1848, $a^4 - b^4$

4. Calcular y simplificar al máximo:
$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x^3-8 \\ 3x-9 & x^2-9 & x^3-27 \end{vmatrix}$$
Solución: $(a+b+c)^3$; $-2x(x-3)(x-2)(x-1)$

5. Calcular:
$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$
Solución: $a(b-a)(c-b)(d-c)$.

6. Los números 1573, 3263, 5369 y 2613 son divisibles por 13. Demostrar que también lo es el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 3 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

7. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} 15+2x & 11 & x \\ 11+3x & 17 & -2x \\ 7+x & 14 & -3x \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -x & 3 & -1 \\ x^2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a-x & x & 1 \\ a+x & -\frac{x}{2} & -3 \\ x & \frac{x}{3} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$x = 0, \frac{101}{56} \quad ; \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{4}$$

$$x = 0, \frac{8a}{19} \quad ; \quad x = -\frac{abc}{ab+ac+bc}$$

8. Dada la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

se pide:

a) Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes, hallar una solución de la ecuación dada sin desarrollar el determinante del primer miembro.

b) Hallar las restantes soluciones de dicha ecuación.

Solución: 1, −1

9. Demostrar las dos igualdades que siguen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & c+1 \end{vmatrix} = abc \quad ; \quad \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} = 4a+1$$

10. Determinantes de *Vandermonde*. Demostrar las siguientes igualdades:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

11. Calcular:
$$\begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 10\,a & 10\,b & 10\,c \\ 3a^2 & 3b^2 & 3c^2 \end{vmatrix}$$
Solución: $210(b-a)(c-a)(c-b)$

12. Calcular por transformaciones elementales (sin emplear la regla de Sarrus) y justificando los pasos, el determinante:
$$\begin{vmatrix} 1 & b & c+a \\ 1 & a & b+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$
Solución: 0

13. Dadas las matrices:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \ ; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Comprobar que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

14. Sabiendo que
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$
calcular los siguientes determinantes y enunciar las propiedades que se utilicen:
$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$$
Solución: 30, -2

9.2. Matrices inversas

1. Hallar las matrices inversas de:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \ ; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \ ; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
Solución:
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \ ; B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \ ; C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Verificar que todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a+d=-1$ y $|A|=1$, cumplen $A^3 = I$. ¿Hay alguna otra matriz que tenga esta propiedad?.

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, se llaman *valores propios* de dicha matriz a los valores de λ, tales que el determinante de la matriz $A - \lambda I$ sea nulo. Hallar los valores propios de A. (I representa la matriz identidad o unidad).

   Solución: $\lambda = 4, -1$.

4. Hallar la inversa de la matriz:
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Solución: $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{9}{5} & 3 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & -1 \end{pmatrix}$

5. Resolver la ecuación $A \cdot X = B$, siendo:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ ; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

   Solución: $X = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}$

6. Hallar una matriz X tal que:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

   Solución: $X = \begin{pmatrix} -10 & 8 & 3 & 0 \\ 25 & -22 & -2 & 0 \\ -12 & 11 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

7. Dada la matriz:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Estudiar si tiene inversa y en caso afirmativo, calcularla. ¿Forman una base de $\mathbb{R}^3$ los vectores $\vec{v_1} = (1, 1, 0)$, $\vec{v_2} = (0, 1, 1)$, $\vec{v_3} = (1, 0, 1)$?.

   Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; Sí.

8. Dada la matriz:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Demostrar que la inversa de A^n es $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Hallar los valores de x para los cuales, la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{pmatrix}$$

no tiene inversa.

<u>Solución</u>: $x = -2, \frac{2}{3}$

10. Resolver la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B = C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>: $X = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

11. Resolver la ecuación matricial $M \cdot X + N = P$, siendo:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>: $X = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

12. Calcular la matriz X en la ecuación $A^3 \cdot X = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \; ; a + d = 1 \; ; |A| = 1 \; ; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>: $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

13. Encontrar una matriz X que verifique $A \cdot X + B = C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>: $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$

14. Resolver la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>: $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

15. Hallar los valores de λ para los que la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa. Calcular su inversa cuando $\lambda = 1$.

Solución: $\exists A^{-1} \iff \lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 7$. Para $\lambda = 1$ resulta: $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

16. Hallar el rango de la matriz A según los diferentes valores de $t \in \mathbb{R}$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de t existe A^{-1}?.

Solución: $r(A) = 2$ si $t = 0, 1, 2$ y $r(A) = 3$ en los demás casos.

17. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

   a) Hallar los valores de x para los que A tiene inversa.

   b) Hallar la matriz Y cuadrada de orden 3 que es solución de la ecuación matricial $A \cdot Y + B = I$, siendo A la matriz anterior para $x = 3$, I es la matriz identidad de orden 3 y B es la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

   a) $x \neq 0 \wedge x \neq 2$

   b) $Y = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

18. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar si es posible un valor de λ para el cual la matriz $(A - \lambda I)^2$ sea la matriz nula.

Solución: $\lambda = 1$

19. Discutir, en función del valor de a el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para $a = 2$, ¿tiene A matriz inversa?. En caso afirmativo, calcularla.

Solución: $r(A) = 2$ si $a = 0$ y $r(A) = 3$ en los demás casos. Para $a = 2$, resulta: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

20. Dadas las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

determinar si $C \cdot D$ tiene inversa, y en ese caso, hallarla.

Solución: Sí. $(C \cdot D)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

21. La matriz cuadrada X de orden 3 verifica la relación:

$$X^3 + X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Determinar, si es posible, el rango de X.

b) ¿Verifica alguna de las matrices A y B siguientes la relación del enunciado?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: $r(X) = 3$. Sí, la B.

22. Se dice que una matriz cuadrada A de orden n es ortogonal si su inversa A^{-1} y su traspuesta A^t coinciden. Dado un número real x, sea B la matriz

$$B = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Es ortogonal la matriz B?.

b) ¿Es B^2 ortogonal?.

Solución: Sí. Sí.

23. Considerar las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determinar si A y B son invertibles y, en su caso, calcula la matriz inversa.

b) Resolver la ecuación matricial $BA - A^2 = AB - X$.

Solución: B no tiene inversa, y

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

24. El determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$$

vale cero para $a = 3$. Comprobar esta afirmación sin desarrollarlo e indicando las propiedades de los determinantes que se apliquen. Determinar todos los valores de a para los que las tres columnas del determinante anterior representan vectores linealmente dependientes. Justificar la respuesta.

Solución: $a = 0, 2, 3$.

25. Sea C la matriz, que depende de un parámetro m, dada por

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro m no tiene inversa la matriz C?.

b) Calcular la matriz inversa de C para $m = 2$.

Solución: $m = -1$. $C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

26. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

a) Hallar los valores de x e y tales que $AX = U$.

b) Calcular la matriz A^{-1} y determinar $A^{-1}U$.

c) Encontrar los posibles valores de m para los que los vectores

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes.

Solución: $x = 3$, $y = -1$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $A^{-1}U = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $m = \pm\sqrt{2}$.

27. Resolver la ecuación matricial $A^2 \cdot X = 2B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

<u>Solución</u>: $X = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 52 \\ 8 & -2 & 30 \end{pmatrix}$

28. De las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determina cuáles tienen inversa y en los casos que exista, calcula el **determinante** de dichas inversas.

<u>Solución</u>: A y D tienen inversa, B y C no; $|A^{-1}| = -\frac{1}{2}$, $|D^{-1}| = 1$

29. Se sabe que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$ verifica que $\det(A) = 1$ y sus columnas son vectores perpendiculares dos a dos.

   a) Calcular los valores de a y b.

   b) Comprobar que para dichos valores se verifica que $A^{-1} = A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

<u>Solución</u>: Dos soluciones: $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

30. Determinar la matriz X tal que $AX - 3B = 0$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>: $X = \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 12 & -39 \\ 9 & -21 \end{pmatrix}$

31. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Calcular el **determinante** de las matrices $2A$, A^{31} y $(A^{31})^{-1}$.

   b) Hallar la matriz A^{-1}.

<u>Solución</u>: -8, -1, -1; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

32. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$

a) Determinar para qué valores del parámetro λ la matriz A no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $\lambda = -2$.

Solución: $\lambda = 1, -1$. Para $\lambda = -2$, es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$

9.3. Selectividad

1. **Selectividad Junio 2000**. Considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

a) Hallar los valores de λ para los que la matriz A no tiene inversa.

b) Tomando $\lambda = 1$, resolver el sistema escrito en forma matricial

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $\lambda = 0, 1$; $x = t, y = -t, z = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

2. **Selectividad Junio 2000**. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

calcular $(A^t A^{-1})^2 A$.

Solución: $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

3. **Selectividad Septiembre 2000**. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 3 \\ 4 & 1 & -b \end{pmatrix}$$

a) Determinar para qué valores del parámetro b existe A^{-1}.

b) Calcular A^{-1} para $b = 2$.

Solución: $b \neq 1$ y $b \neq 3$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. **Selectividad Junio 2001**. Sea

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de x existe la matriz inversa de A?. Calcular dicha matriz inversa.

Solución: la matriz inversa A^{-1} existe para todo valor de x; $A^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. **Selectividad Junio 2002**. Determinar la matriz X que verifica la ecuación $AX = X - B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

6. **Selectividad Junio 2003**. Sean C_1, C_2 y C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada A de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcular, indicando las propiedades utilizadas:

   a) El determinante de A^3.

   b) El determinante de A^{-1}.

   c) El determinante de $2A$.

   d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $3C_1 - C_3$, $2C_3$ y C_2.

Solución: $|A^3| = 125$; $|A^{-1}| = \frac{1}{5}$; $|2A| = 40$; $|3C_1 - C_3, 2C_3, C_2| = -30$.

7. **Selectividad Septiembre 2003**. Considerar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) ¿Para qué valores de m tiene solución la ecuación matricial $A \cdot X + 2B = 3C$?.

   b) Resuelve la ecuación matricial dada para $m = 1$.

Solución: $m \neq 0$; $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

8. **Selectividad junio 2004**. Considerar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Calcular $A \cdot B$, $A \cdot C$, $A^t \cdot B^t$, $C^t \cdot A^t$ siendo A^t, B^t y C^t las matrices traspuestas de A, B y C respectivamente.

   b) Razonar cuáles de las matrices A, B, C y $A \cdot B$ tienen inversa y en los casos en que la respuesta sea afirmativa, hallarla.

Solución: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

La matriz $A \cdot B$ tiene inversa y $(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. **Selectividad junio 2005**. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   a) ¿Tiene A inversa?. En caso afirmativo, calcularla.

   b) Determinar la matriz X que cumple que $A \cdot X + C \cdot B^t = B \cdot B^t$, siendo B^t la matriz transpuesta de B.

   Solución: Sí, $A^{-1} = \frac{1}{7}A$. $X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 1 & -26 \end{pmatrix}$

10. **Selectividad septiembre 2005**. Sabiendo que:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$

   calcular, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

   a) $|-3A|$ y $|A^{-1}|$.

   b) $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$.

   c) $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$.

   Solución: $|-3A| = -54$, $|A^{-1}| = \frac{1}{2}$; -4; -2.

11. **Selectividad Junio 2006**. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

   siendo a un número real.

   a) Calcular el valor de a para que

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

   b) Calcular, en función de a, los determinantes de las matrices $2A$, A^t, siendo A^t la traspuesta de A.

   c) ¿Existe algún valor de a para el cual la matriz A es simétrica?. Razona la respuesta.

Solución: $a = 4$; $|2A| = -4a^2$, $|A^t| = -a^2$; No.

12. **Selectividad septiembre 2006**. Resolver $AB^tX = -2C$ siendo B^t la traspuesta de la matriz B y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 & -14 \\ 5 & 21 \end{pmatrix}$

13. **Selectividad Junio 2007**. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

   a) Determinar la matriz $B = A^2 - 2A$.
   b) Determinar los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa.
   c) Calcular B^{-1} para $\lambda = 1$.

Solución:

   a) $B = \begin{pmatrix} -2 & 1-\lambda \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 2\lambda - 1 \end{pmatrix}$.
   b) Existe B^{-1} cuando $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 3$.
   c) $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

14. **Selectividad septiembre 2007**. Sea I la matriz identidad de orden 2, y sea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Encontrar los valores de m para los cuales se cumple que $(A - I)^2 = O$, donde O es la matriz nula de orden 2.
   b) Para $m = 2$, hallar la matriz X tal que $AX - 2A^t = 0$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución: $m = 0$; $X = 2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

15. **Selectividad junio 2009**. Sean F_1, F_2 y F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcular, indicando las propiedades utilizadas:

   a) El determinante de B^{-1}.
   b) El determinante de $(B^t)^4$ (B^t es la matriz traspuesta de B).
   c) El determinante de $2B$.
   d) El determinante de una matriz cuadrada C cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3$, $3F_3$, F_2.

Solución: $|B^{-1}| = -\frac{1}{2}$, $|(B^t)^4| = 16$, $|2B| = -16$, $|C| = 30$.

16. **Selectividad septiembre 2009**. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz X que verifica $AX - B^t = 2C$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

Solución: $X = -\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 18 \\ 7 & 30 \end{pmatrix}$

17. **Selectividad junio 2010**. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Indicar los valores de m para los que A es invertible.

b) Resolver la ecuación matricial $XA - B^t = C$ para $m = 0$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

Solución: A tiene inversa $\Longleftrightarrow m \neq 1$ y $m \neq 3$. $X = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

18. **Selectividad septiembre 2010**. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz X que cumpla la ecuación $A \cdot X \cdot B = C$.

Solución: $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

19. **Selectividad junio 2011**. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores de λ para los que la matriz $A^2 + 3A$ no tiene inversa.

b) Para $\lambda = 0$, hallar la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

Solución: $\lambda = -1, -4$; $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

20. **Selectividad septiembre 2011**. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calcular los valores de α para los que la mariz inversa de A es $\dfrac{1}{12} \cdot A$.

- Para $\alpha = -3$, determinar la matriz X que verifica la ecuación $A^t \cdot X = B$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Solución: $\alpha = -3$, $X = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -2 & 15 & 7 \end{pmatrix}$.

21. **Selectividad junio 2012**. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$

    a) ¿Para qué valores del parámetro k no existe la inversa de la matriz A?. Justificar la respuesta.

    b) Para $k = 0$, resolver la ecuación matricial $(X + I) \cdot A = A^t$, donde I denota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A.

Solución: $k = \frac{1}{2}$; $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Capítulo 10

Sistemas de ecuaciones lineales

1. Considerar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x - 2y - z &= 4 \\ x + 2y - 2z &= -1 \\ x - z &= 1 \end{aligned}$$

   a) ¿Existe una solución del mismo en la que $y = 0$?.
   b) Resolver el sistema homogéneo asociado al sistema dado.
   c) Hacer una interpretación geométrica tanto del sistema dado como de sus soluciones.

   <u>Solución</u>: Sí, $x = 3,\ y = 0,\ z = 2$. Para el segundo apartado $x = 2t,\ y = t,\ z = 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{aligned} ax + by + 1 &= 0 \\ a'x + b'y + c &= 0 \end{aligned}$$

   se sabe que $x = 1,\ y = 2$ es una solución y que $x = 7,\ y = 3$ es otra solución. ¿Qué puede afirmarse respecto de las soluciones del sistema?, ¿cuántas tiene?, ¿cuáles son?.

   <u>Solución</u>: El sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro. Las soluciones son $x = -11 + 6t$, $y = t$.

3. Considerar el sistema

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ 3x - 4y - 2z &= -3 \end{aligned}$$

   a) Añadir una ecuación lineal al sistema anterior de modo que el sistema resultante sea incompatible.
   b) Si añadimos al sistema dado la ecuación $mx+y-z = -1$, determinar para qué valores del parámetro m el sistema resultante es compatible indeterminado y resolverlo.

   <u>Solución</u>: Para el segundo apartado es $m = -1$, y entonces $x = 1+6t$, $y = 1+5t$, $z = 1-t$.

4. En un supermercado se ofrecen dos lotes formados por distintas cantidades de los mismos productos.

   - El primer lote está compuesto por una botella de cerveza, tres bolsas de cacahuetes y siete vasos y su precio es de 565 pts.

- El segundo lote está compuesto por una botella de cerveza, cuatro bolsas de cacahuetes y diez vasos y su precio es de 740 pts.

Con estos datos, ¿se podría averiguar cuánto debería valer un lote formado por una botella de cerveza, una bolsa de cacahuetes y un vaso. Justifica la respuesta.

Solución: Sí, y su precio sería 215 pts.

5. Una tienda vende una clase de calcetines a 1 200 pts. el par. Al llegar las rebajas, durante el primer mes realiza un 30 % de descuento sobre el precio inicial y en el segundo mes un 40 % también sobre el precio inicial. Sabiendo que vende un total de 600 pares de calcetines por 597 600 pts. y que en las rebajas ha vendido la mitad de dicho total (de calcetines), ¿a cuántos pares de calcetines se les ha aplicado un descuento del 40 %?.

   Solución: 120 pares.

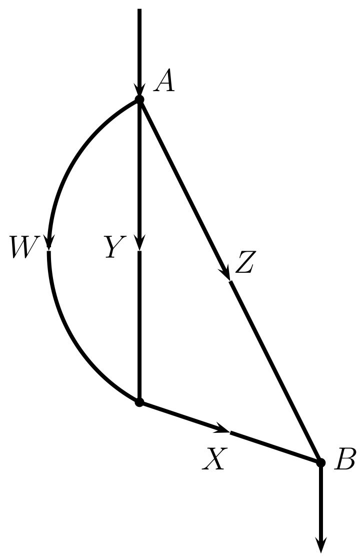
6. Determinar según los valores del parámetro α cuándo tiene solución el sistema

$$\begin{aligned} \alpha x + y + z &= \alpha^2 \\ \alpha x + (1-\alpha)y + (\alpha-1)z &= \alpha^2 \\ \alpha x + y + \alpha z &= 2\alpha^2 \end{aligned}$$

   Resolverlo cuándo sea compatible indeterminado.

   Solución: Para $\alpha = 0$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro y su solución es $x = t,\ y = z = 0,\ t \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$ es un sistema de Cramer (solución única). En los demás casos es incompatible.

7. Por la abertura A del mecanismo de tubos de la figura se introducen 50 bolas que se deslizan hasta salir por B. Sabemos que por el tubo W han pasado 10 bolas.



   a) Justificar si es posible hallar el número de bolas que pasan exactamente por cada uno de los tubos X, Y y Z.

   b) Supongamos que podemos controlar el número de bolas que pasan por el tubo Y. Escribir las expresiones que determinan el número de bolas que pasan por los tubos X y Z en función de las que pasan por Y.

c) Se sabe un dato nuevo: por Y circulan 3 veces más bolas que por Z. ¿cuántas circulan por X, Y y Z?.

Solución: No. Si x, y, z son el número de bolas que pasan por X, Y, Z respectivamente, entonces $x = 10 + y$, $z = 40 - y$. Para el tercer apartado $x = 40,\ y = 30,\ z = 10$.

8. Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ my + z &= 0 \\ x + (1+m)y + mz &= 1 + m \end{aligned}$$

a) Estudiar su comportamiento según los valores del parámetro m.

b) Resolverlo para $m = 2$.

Solución:

- $m = 1$, incompatible.
- $m = 0$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro: $x = t,\ y = 1 - t,\ z = 0$.
- $m \neq 0$ y $m \neq 1$, sistema de Cramer.

Para $m = 2$, resulta $x = 2$, $y = -1$, $z = 2$.

9. Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro b

$$\begin{aligned} x + y + bz &= b^2 \\ -x + y + z &= -3 \\ bx + y + z &= 3b \end{aligned}$$

y resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

- $b = 1$, incompatible.
- $b = -1$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro: $x = 2 + t,\ y = -1,\ z = t$.
- $b \neq 1$ y $b \neq -1$, sistema de Cramer (solución única).

10. Una persona trata de adivinar, mediante ciertas pistas, el coste de tres productos A, B y C que un amigo suyo ha comprado:

Pista 1: Si compro una unidad de A, dos de B y una de C me gasto 900 pts.

Pista 2: Si compro m unidades de A, $m + 3$ unidades de B y 3 de C me gasto 2 950 pts.

a) ¿Hay algún valor de m para el cual estas dos pistas no son compatibles?.

b) Si en la Pista 2 se toma $m = 4$, ¿es posible saber el coste de cada uno de los productos?.

c) El amigo le dice finalmente que el producto C vale 5 veces lo que vale el producto A y que en la Pista 2 se tiene $m = 4$. ¿Cuánto valen A, B y C?.

Solución: Sí, cuando $m = 3$. No. Si es x, y, z el precio de los productos A, B, C respectivamente, entonces $x = 100$, $y = 150$, $z = 500$.

11. Se considera el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -1 \\ 2x + 5y + 4z &= -2 \\ x + 3y + m^2 z &= m \end{aligned}$$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

c) Razonar para qué valores de m tiene inversa la matriz de los coeficientes del sistema.

Solución:

- $m = 1$, incompatible.
- $m = -1$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro: $x = -1 - 7t,\ y = 2t,\ z = t$.
- $m \neq 1$ y $m \neq -1$.

12. Se dice que dos matrices A y B son **semejantes** cuando existe una matriz invertible P tal que $AP = PB$.

a) Probar que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ son semejantes.

b) Resolver los sistemas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solución:

a) En efecto, basta tomar $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) La solución del primer sistema es $x = 2t, y = t,\ t \in \mathbb{R}$ y la del segundo es $x = t, y = -t,\ t \in \mathbb{R}$.

13. Estudiar el siguiente sistema según los valores del parámetro k e interpreta geométricamente los resultados

$$\begin{aligned} 2x + 2y + (k+2)z &= -5 \\ x + y - 2z &= 5 \\ 3x + ky - 6z &= 5k \end{aligned}$$

- $k = -6$, sistema incompatible. Los tres planos no tienen ningún punto común.
- $k = 3$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro. Los tres planos contienen la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{5}{3} - t \\ z = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

- $k \neq -6$ y $k \neq 3$, sistema de Cramer. Los tres planos tienen un punto común.

14. Discutir y resolver en caso de compatibilidad los siguientes sistemas según los valores del parámetro a:

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{r} ax - y = 1 \\ -2x + (a-1)y = 2 \end{array} \right. \quad ; \quad \text{b)} \left\{ \begin{array}{r} 2x - y = 2 \\ ax - 2y = 1 \\ 2x + ay = 2 \\ x + 5y = a \end{array} \right.$$

Solución:

- Problema a)
  - $a = 2$, incompatible
  - $a = -1$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro: $x = -1 - t, y = t$.
  - $a \neq 2 \wedge a \neq -1$, sistema de Cramer: $x = \frac{1}{a-2}, y = \frac{2}{a-2}$
- Problema b)
  - $a \neq 1$, incompatible
  - $a = 1$, sistema de Cramer: $x = 1, y = 0$

15. Discutir y resolver en caso de compatibilidad los siguientes sistemas según los valores del parámetro a:

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{r} ax + y = a^2 \\ x + a^2y = 1 \end{array} \right. \quad ; \quad \text{b)} \left\{ \begin{array}{r} ax + y + 3z = 3 \\ x - y - z = 0 \\ 5x - 3y - 2z = 6 \end{array} \right.$$

Solución:

- Problema a)
  - $a = 1$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro: $x = 1 - t, y = t$.
  - $a \neq 1$, sistema de Cramer: $x = \frac{a^3+a^2+a+1}{a^2+a+1}, y = -\frac{a}{a^2+a+1}$
- Problema b)
  - $a = 3$, incompatible
  - $a \neq 3$, sistema de Cramer: $x = -\frac{9}{a-3}, y = -\frac{6a+9}{a-3}, z = \frac{6a}{a-3}$

16. Discutir y resolver en caso de compatibilidad los siguientes sistemas según los valores del parámetro a:

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{l} ax + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{array} \right. \quad ; \quad \text{b)} \left\{ \begin{array}{r} 2x + y - z = 0 \\ ax - y - z = a - 1 \\ 3x - 2az = a - 1 \end{array} \right.$$

Solución:

- Problema a)
  - $a = \frac{1}{5}$, incompatible
  - $a \neq \frac{1}{5}$, sistema de Cramer: $x = \frac{9}{5a-1}, y = \frac{2a-4}{5a-1}, z = \frac{6a-3}{5a-1}$

- Problema b)
  - $a = 1$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro: $x = 2t, y = -t, z = 3t$.
  - $a = -3$, incompatible
  - $a \neq 1 \wedge a \neq -3$, sistema de Cramer: $x = \frac{a-1}{a+3}, y = -\frac{5(a-1)}{2(a+3)}, z = -\frac{a-1}{a+3}$

17. Discutir y resolver en caso de compatibilidad los siguientes sistemas según los valores del parámetro a:

$$\text{a)} \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 4x + 6y - az = 2 \\ x + y + az = 10 \end{cases} \quad ; \quad \text{b)} \begin{cases} ax + y + z = 0 \\ (a+1)x + y - az = a \\ x + (a+1)y = 2a \end{cases}$$

Solución:

- Problema a)
  - $a = 8$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro: $x = 29 - 28t, y = -19 + 20t, z = t$.
  - $a \neq 8$, sistema de Cramer: $x = 29, y = -19, z = 0$
- Problema b)
  - $a = 0$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro: $x = t, y = -t, z = t$.
  - $a = -1$, incompatible
  - $a \neq 0 \wedge a \neq -1$, sistema de Cramer: $x = -\frac{1}{a+1}, y = \frac{2a^2+2a+1}{(a+1)^2}, z = -\frac{a^2+a+1}{(a+1)^2}$

18. Discutir y resolver en caso de compatibilidad los siguientes sistemas según los valores del parámetro a:

$$\text{a)} \begin{cases} 5x + 2y - z = 9 \\ 2x - 4y + 8z = a \\ x - 2y + 4z = 2 \end{cases} \quad ; \quad \text{b)} \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

Solución:

- Problema a)
  - $a = 4$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro: $x = \frac{11-3t}{6}, y = \frac{21t-1}{12}, z = t$.
  - $a \neq 4$, incompatible
- Problema b)
  - $a = 1$, compatible con infinitas soluciones dependientes de dos parámetros: $x = 1 - s - t, y = s, z = t$.
  - $a = -2$, incompatible
  - $a \neq 1 \wedge a \neq -2$, sistema de Cramer: $x = -\frac{a+1}{a+2}, y = \frac{1}{a+2}, z = \frac{(a+1)^2}{a+2}$

19. Discutir y resolver en caso de compatibilidad los siguientes sistemas según los valores del parámetro a:

$$\text{a)}\ \begin{cases} x + ay + z = a + 1 \\ (a+1)x + y - az = 0 \\ 2x + y - z = 1 - a \end{cases} \quad ; \quad \text{b)}\ \begin{cases} x - 2z = 3 \\ 4x + y = 5 \\ 2x + z = a \\ 2x - 3z = a \end{cases}$$

Solución:

- Problema a)
  - $a = 1$, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro: $x = 2(t-1), y = 4 - 3t, z = t$.
  - $a = 2$, incompatible
  - $a \neq 1 \wedge a \neq 2$, sistema de Cramer: $x = -\frac{a^2+a+2}{a-2}, y = \frac{3a+2}{a-2}, z = -\frac{a(a+2)}{a-2}$
- Problema b)
  - $a \neq 6$, incompatible
  - $a = 6$, sistema de Cramer: $x = 3, y = -7, z = 0$

20. Discutir y resolver en caso de compatibilidad los siguientes sistemas según los valores del parámetro a:

$$\text{a)}\ \begin{cases} 3x - ay + 3z = 4 \\ ax + y - z = 2 \\ x - y + z = 1 \\ ax + 4y - z = 5 \end{cases} \quad ; \quad \text{b)}\ \begin{cases} x + y - z = 3 \\ 3x + 4y - z = 5 \\ x + y - az = 3 \\ ax + 2y + (a+2)z = a^2 - 2 \end{cases}$$

Solución:

- Problema a)
  - $a = 2$, sistema de Cramer: $x = y = z = 1$
  - $a = -1$, incompatible
  - $a \neq 2 \wedge a \neq -1$, incompatible
- Problema b)
  - $a = 6$, sistema de Cramer: $x = 7, y = -4, z = 0$
  - $a = 1$, sistema de Cramer: $x = 7, y = -4, z = 0$
  - $a \neq 6 \wedge a \neq 1$, incompatible

21. Discutir y resolver en caso de compatibilidad el siguiente sistema según el valor del parámetro a:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= 8 \\ ax - y - z &= 1 \\ x - y + z &= -2 \end{aligned}$$

Solución:

- $a = 2$, sistema de Cramer: $x = 1, y = 2, z = -1$
- $a \neq 2$, incompatible

22. Sea el sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ x - my &= 5 \end{aligned}$$

a) Hallar para qué valor de m es $x = 0$.

b) Hallar para qué valor de m es incompatible el sistema.

Solución: $m = -1$; $m = -2$

23. Sea el sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z &= a + 1 \\ x + y + (a-1)z &= a \\ x + ay + z &= 1 \end{aligned}$$

a) ¿Para qué valores de a es compatible y determinado?. Resolverlo para dichos valores.

b) ¿Para qué valores de a es indeterminado?. Resolverlo para dichos valores.

c) ¿Es incompatible para algún valor de a?.

Solución:

a) $a \neq 1 \wedge a \neq 2$. Las soluciones son:

$$x = \frac{a^3 - a^2 - 2a + 1}{(a-1)(a-2)}, y = -\frac{a}{a-1}, z = -\frac{1}{a-2}$$

b) Para ningún valor de a.

c) Para $a = 1$ y $a = 2$.

24. La suma de las tres cifras de un número es 16, y la suma de la primera y la tercera es igual a la segunda. Permutando entre sí dichas cifras (primera y tercera) resulta un número que supera en 198 unidades al número dado. ¿Cuál es dicho número?.

Solución: 385

25. Varios amigos pagan en un bar 755 pts. por 5 cervezas, 3 bocadillos y 2 cafés. Al día siguiente consumen 3 cervezas, 2 bocadillos y 4 cafés por lo que pagan 645 pts.

a) Si al tercer día consumen 7 cervezas y 4 bocadillos, ¿qué precio deberían pagar por ello?.

b) ¿Puede saberse de los datos anteriores el precio de una cerveza, o un bocadillo o un café?. Si además sabemos que un café vale 60 pts., ¿Puede saberse el precio de una cerveza o un bocadillo?.

Solución:

a) 865 ptas.

b) No; Sí, 55 y 120 pts. la cerveza y el bocadillo respectivamente.

26. Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lambda x + 2y &= 3 \\ -x + 2\lambda z &= -1 \\ 3x - y - 7z &= \lambda + 1 \end{aligned}$$

   a) Hallar todos los valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene infinitas soluciones.

   b) Resolver el sistema para los valores de λ obtenidos en el apartado anterior.

   c) Discutir el sistema para los restantes valores de λ.

   Solución: $\lambda = 1$; para $\lambda = 1$ es $x = 1 + 2t,\ y = 1 - t,\ z = t$. Para $\lambda = -7$ el sistema es incompatible y si $\lambda \neq 1, -7$ el sistema es de Cramer.

27. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

   a) Hallar los valores de λ para los que la matriz A no tiene inversa.

   b) Tomando $\lambda = 1$, resolver el sistema escrito en forma matricial

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Solución: $\lambda = 0, 1$; para $\lambda = 1$ es $x = t,\ y = -t,\ z = t$.

28. Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + \lambda y + (\lambda - 1)z &= 1 \\ y + z &= 1 \\ 2x + y - z &= -3 \end{aligned}$$

   a) Hallar todos los posibles valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene al menos dos soluciones distintas.

   b) Resolver el sistema para los valores de λ obtenidos en el apartado anterior.

   c) Discutir el sistema para los restantes valores de λ.

   Solución: solamente $\lambda = 3$; para $\lambda = 3$ es $x = -2 + t,\ y = 1 - t,\ z = t$. Para $\lambda \neq 3$ el sistema es incompatible.

29. Discutir y resolver el siguiente sistema según los valores del parámetro λ:

$$\begin{aligned} x + \lambda y + z &= 0 \\ \lambda x + y + z &= 0 \\ x + y + \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

   Solución:

- $\lambda = 1$, compatible con infinitas soluciones dependientes de 2 parámetros: $x = -s - t,\ y = s,\ z = t$, para todos $s, t \in \mathbb{R}$.
- $\lambda = -2$, compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro: $x = t,\ y = t,\ z = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
- $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2$, sistema de Cramer cuya solución es la trivial $x = y = z = 0$.

30. Consideremos el sistema escrito en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} b & 1 & b \\ 0 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Discutir el sistema según los valores del parámetro b y resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

- $b = 1$, compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro: $x = -2,\ y = t,\ z = -t$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
- $b = -1$, incompatible.
- $b \neq 1, -1$, sistema de Cramer.

31. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 2 \\ a & -1 & a-2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

   a) Determinar el rango de A en función del parámetro a.

   b) Discutir en función de a el sistema, dado en forma matricial, $AX = B$

   c) Resolver $AX = B$ en los casos que sea compatible indeterminado.

Solución: $r(A) = \begin{cases} 2, & \text{si } a = 1, \frac{1}{2} \\ 3, & \text{en otro caso} \end{cases}$. Para $a = 1$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro: $x = 1 - t,\ y = -2t,\ z = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Para $a = \frac{1}{2}$ es incompatible y si $a \neq 1, \frac{1}{2}$ es un sistema de Cramer.

32. Consideremos el sistema:

$$\begin{aligned} mx + y - z &= 1 \\ x - my + z &= 4 \\ x + y + mz &= m \end{aligned}$$

Discutirlo según los valores de m. ¿Cuál es, según los valores de m, la posición relativa de los planos cuyas ecuaciones respectivas son las tres que forman el sistema?.

Solución: Si $m = 0$, el sistema es incompatible: los tres planos no tienen ningún punto en común. Si $m \neq 0$, el sistema es de Cramer: los tres planos se cortan en un único punto.

33. Resolver el sistema de ecuaciones, dado en forma matricial: $AX = -AX + B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Solución: $x = -\frac{9}{10}$, $y = \frac{2}{5}$, $z = \frac{7}{10}$

34. Determinar a, b y c sabiendo que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix}, \quad \text{verifica:} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \text{rango}(A) = 2$$

<u>Solución</u>: $a = 1$, $b = \frac{23}{29}$, $c = \frac{33}{29}$

35. Clasificar el siguiente sistema según los valores del parámetro m

$$\begin{aligned} 2x + my &= 0 \\ x + mz &= m \\ x + y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Resolver el sistema anterior para $m = 6$.

<u>Solución</u>: Para $m = 0$, sistema compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro. Para $m = 5$, incompatible. Para $m \neq 0, 5$, sistema de Cramer. Cuando $m = 6$ es $x = -12$, $y = 4$, $z = 3$.

36. Un mayorista de café dispone de tres tipos base: Moka, Brasil y Colombia, para preparar tres tipos de mezcla: A, B y C, que envasa en sacos de 60 Kg., con los siguientes contenidos en kilos y precios del kilo en euros:

	Mezcla A	Mezcla B	Mezcla C
Moka	15	30	12
Brasil	30	10	18
Colombia	15	20	30
Precio (cada Kg.)	4	$4'5$	$4'7$

Suponiendo que el preparado de las mezclas no supone coste alguno, ¿cuál es el precio de cada uno de los tipos base de café?.

<u>Solución</u>: Precio Moka = 4 euros, Precio Brasil = 3 euros, Precio Colombia = 6 euros.

37. **Selectividad Septiembre 2000**. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 5z &= 1 \\ 4x + y - 2z &= 3 \\ 2x - 3y + az &= b \end{aligned}$$

   a) Determinar a y b sabiendo que el sistema tiene infinitas soluciones.

   b) Resolver el sistema resultante.

<u>Solución</u>: $a = \frac{44}{5}$, $b = 5$; $x = 1 - t, \; y = -1 + 14t, \; z = 5t$.

38. **Selectividad Junio 2002**. Determinar una matriz A simétrica (A coincide con su traspuesta) sabiendo que

$$\det(A) = -7 \quad \text{y} \quad A \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

39. **Selectividad Septiembre 2003**. Considerar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Siendo I la matriz identidad de orden 3, calcular los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa.

b) Resolver el sistema $A \cdot X = 3X$ e interpreta geométricamente el conjunto de todas sus soluciones.

Solución: $\lambda = -3, 3$; $x = t,\ y = -2t,\ z = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, una recta.

40. **Selectividad junio 2004**. Considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} mx - y &= 1 \\ x - my &= 2m - 1 \end{aligned}$$

a) Clasificar el sistema según los valores de m.

b) Calcular los valores de m para los que el sistema tiene una solución en la que $x = 3$.

Solución: si $m = 1$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro; si $m = -1$ el sistema es incompatible. En los demás casos, es decir, si $m \neq -1, 1$ el sistema es de Cramer; $m = 1, -\frac{4}{3}$.

41. **Selectividad septiembre 2004**. Determinar a y b sabiendo que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 1 \\ -x + y + 2z &= -1 \\ ax + by + z &= 4 \end{aligned}$$

tiene al menos dos soluciones distintas.

Solución: si $a = 4$, $b = 8$.

42. **Selectividad septiembre 2004**.

a) Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿cuál es el valor de a?.

b) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución: $a = -5$; $\begin{cases} x = -2 - 8t \\ y = -2 - 7t \\ z = 3 + 10t \end{cases}$

43. **Selectividad junio 2005**. Considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+y+z&=-2\\ -lx+3y+z&=-7\\ x+2y+(l+2)z&=-5 \end{aligned}$$

a) Clasificar el sistema según los valores del parámetro l.

b) Resolver el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Solución: Para $l=-1$ el sistema es incompatible. Para $l=-2$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro (compatible indeterminado) y su solución es $\left\{\begin{array}{l} x=1-2t\\ y=-3+t\\ z=t \end{array}\right\}$. Para $l\neq -1,-2$ el sistema es de Cramer (solución única).

44. **Selectividad septiembre 2005**. En una excavación arqueológica se han encontrado sortijas, monedas y pendientes. Una sortija, una moneda y un pendiente pesan conjuntamente 30 gramos. Además, 4 sortijas, 3 monedas y 2 pendientes han dado un peso total de 90 gramos. El peso de un objeto deformado e irreconocible es de 18 gramos. Determina si el mencionado objeto es una sortija, una moneda o un pendiente, sabiendo que los objetos que son del mismo tipo pesan lo mismo.

Solución: moneda.

45. **Selectividad junio 2006**. Resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5\\ 1 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2\\ 2\\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\\ 0\\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución: $x=\frac{1}{4}$, $y=-\frac{5}{4}$, $z=\frac{1}{2}$.

46. **Selectividad septiembre 2006**. Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} &lx-y-z=-1\\ &x+ly+z=4\\ &x+y+z=l+2 \end{aligned}$$

a) Clasificar el sistema según los valores del parámetro l.

b) Resolver el sistema para $l=2$.

Solución: Para $l=1$ el sistema es incompatible. Para $l=-1$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro (compatible indeterminado). Para $l\neq\pm1$ el sistema es de Cramer (solución única). Cuando $l=2$, es $x=1$, $y=0$, $z=3$.

47. **Selectividad junio 2007**.

a) Calcular la matriz inversa de:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Escribir en forma matricial el siguiente sistema y resolverlo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior.

$$\begin{aligned} x+y&=1\\ y+z&=-2\\ x+z&=3 \end{aligned}$$

Solución: $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$; $x=3$, $y=-2$, $z=0$.

48. **Selectividad septiembre 2007**. Considerar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} ax+y+z&=4\\ x-ay+z&=1\\ x+y+z&=a+2 \end{aligned}$$

a) Resolverlo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

b) Resolver el sistema que se obtiene para $a=-2$.

Solución: Para $a=-1$ el sistema es compatible indeterminado, en concreto, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x=-\frac{3}{2}$, $y=\frac{5}{2}-t$, $z=t$, para todo $t\in\mathbb{R}$. Para $a=-2$, el sistema es de Cramer (solución única), $x=-\frac{4}{3}$, $y=1$, $z=\frac{1}{3}$.

49. **Selectividad junio 2008**. Un cajero automático contiene sólo billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 130 billetes con un importe de 3000 euros.

a) ¿Es posible que en el cajero haya el triple número de billetes de 10 que de 50?

b) Suponiendo que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, calcula cuantos billetes hay de cada tipo.

Solución: No; 80, 10 y 40 billetes de 10, 20 y 50 euros respectivamente.

50. **Selectividad junio 2008**. Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\m&m^2&m^2\\m&m&m^2\end{pmatrix}$$

a) Hallar los valores del parámetro m para los que el rango de A es menor que 3.

b) Estudiar si el sistema

$$A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

tiene solución para cada uno de los valores de m obtenidos en el apartado anterior.

Solución: $m=0,1$; para $m=0$ el sistema es incompatible (no tiene solución); para $m=1$, el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de dos parámetros (compatible indeterminado).

51. **Selectividad septiembre 2008**. Considerar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+y+z &= a-1 \\ 2x+y+az &= a \\ x+ay+z &= 1 \end{aligned}$$

   a) Discutirlo según los valores del parámetro a.
   b) Resolverlo para $a=2$.

   Solución: para $a=1$ el sistema es incompatible; para $a=2$ el sistema es compatible indeterminado, en concreto, compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x=1-t$, $y=0$, $z=t$, para todo $t\in\mathbb{R}$. Por último, para $a\neq 1,2$, el sistema es de Cramer (solución única).

52. **Selectividad septiembre 2008**. Sabemos que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x-y+3z &= 1 \\ x+2y-z &= 2 \end{aligned}$$

   tiene las mismas soluciones que el que resulta de añadirle la ecuación $ax+y+7z=7$.

   a) Determinar el valor de a.
   b) Calcular la solución del sistema inicial de dos ecuaciones, de manera que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la unidad.

   Solución: $a=8$; $x=\frac{6}{5}$, $y=\frac{1}{5}$, $z=-\frac{2}{5}$.

53. **Selectividad junio 2009**. Una empresa envasadora ha comprado un total de 1 500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40 500 euros. Calcular cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos ha comprado el 30 % de las cajas.

   Solución: 13 500 euros en el primer mercado, 15 000 en el segundo y 12 000 en el tercero.

54. **Selectividad septiembre 2009**. Discutir según los valores del parámetro λ el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 3x+\lambda y &= 0 \\ x+\lambda z &= \lambda \\ x+y+3z &= 1 \end{aligned}$$

   y resolverlo para $\lambda=0$.

   Solución: para $\lambda=0$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x=0$, $y=1-3t$, $z=t$, para todo $t\in\mathbb{R}$. Para $\lambda=6$ es incompatible. Por último, para $\lambda\neq 0,6$, el sistema es de Cramer (solución única).

55. **Selectividad junio 2010**. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lambda x+y+z &= \lambda+2 \\ 2x-\lambda y+z &= 2 \\ x-y+\lambda z &= \lambda \end{aligned}$$

a) Discutirlo según los valores de λ. ¿Tiene siempre solución?.

b) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

Solución: Si $\lambda \neq -1$, el sistema es de Cramer (solución única). Para $\lambda = -1$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = \frac{1}{3}$, $y = t$, $z = \frac{4}{3} - t$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

56. **Selectividad septiembre 2010**.

a) Discutir, según los valores del parámetro λ, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x + \lambda y + z &= \lambda \\ \lambda x + 2y + (\lambda+2)z &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 6 - \lambda \end{aligned}$$

b) Resolver el sistema anterior para $\lambda = 0$.

Solución: para $\lambda = 8$ el sistema es incompatible. Para $\lambda = 0$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = t$, $y = 2 - t$, $z = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Por último, para $\lambda \neq 0, 8$, el sistema es de Cramer (solución única).

57. **Selectividad junio 2011**. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} -\lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 2 \\ \lambda x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

a) Clasificar el sistema según los valores del parámetro λ.

b) Resolver el sistema para $\lambda = 0$.

Solución: para $\lambda = 1$ el sistema es incompatible. Para $\lambda = 0$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = 2 - t$, $y = 1 - t$, $z = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Por último, para $\lambda \neq 0, 1$, el sistema es de Cramer (solución única).

58. **Selectividad septiembre 2011**. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Calcular el rango de A dependiendo de los valores de α.
- Para $\alpha = 2$, resolver la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

Solución: $r = \text{rango de } A = \begin{cases} 3, & \text{si } \alpha \neq -2, 1 \\ 2, & \text{si } \alpha = -2 \\ 1, & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$, $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

59. **Selectividad junio 2012**. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & \lambda + 1 \\ & & 3y & + & 2z & = & 2\lambda + 3 \\ 3x & + & (\lambda - 1)y & + & z & = & \lambda \end{array}$$

a) Resolver el sistema para $\lambda = 1$.

b) Hallar los valores de λ para los que el sistema tiene solución única.

c) ¿Existe algún valor de λ para el que el sistema admite la solución $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$?.

Solución: $x = t,\ y = 1 + 2t,\ z = 1 - 3t$; $\lambda \neq 1$; $\lambda = -1$

60. **Selectividad septiembre 2012**. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{array}{ccccc} kx & + & 2y & = & 2 \\ 2x & + & ky & = & k \\ x & - & y & = & -1 \end{array}$$

a) Probar que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro k.

b) Especificar para qué valores del parámetro k es determinado y para cuáles indeterminado.

c) Hallar las soluciones en cada caso.

Solución: para $k = -2$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro (indeterminado según la vieja terminología, que ya debería desaparecer, pues está perfectamente determinado), $x = t$, $y = 1 + t$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Para $k \neq -2$ el sistema es de Cramer (determinado), $x = 0$, $y = 1$.

61. **Selectividad septiembre 2012**. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} x - y &= \lambda \\ 2\lambda y + \lambda z &= \lambda \\ -x - y + \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

a) Clasificarlo según los distintos valores del parámetro λ.

b) Resolverlo para $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.

Solución: para $\lambda = 0$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = 0$, $y = 0$, $z = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Para $\lambda = -1$ el sistema es compatible con infinitas soluciones dependientes de un parámetro, $x = -1 + t$, $y = t$, $z = 1 - 2t$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Por último, para $\lambda \neq 0, -1$, el sistema es de Cramer (solución única).

Capítulo 11

Geometría afín

11.1. Resumen teórico

11.1.1. Determinación de una recta

Una recta r puede calcularse de las siguientes formas:

1. Con dos puntos distintos $A\,(x_1, y_1, z_1)$, $B\,(x_2, y_2, z_2)$, $A \neq B$.
2. Con un punto A y el vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.
3. Como intersección de dos planos no paralelos.

Si estamos en el primer caso el vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ es un vector director, y así:

Ecuaciones paramétricas

$$r \equiv \left\{ \begin{aligned} x &= x_1 + v_1 t \\ y &= y_1 + v_2 t \\ z &= z_1 + v_3 t \end{aligned} \right\} \forall t \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua

$$r \equiv \frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3}$$

11.1.2. Posición relativa de dos rectas

Dadas dos rectas

$$r \equiv \begin{cases} P\,(x_1, y_1, z_1) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} Q\,(x_2, y_2, z_2) \\ \vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \end{cases}$$

Se forman las matrices $A = (\vec{v}, \vec{w})$, $A' = (\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{PQ})$, es decir:

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad A' = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & x_2 - x_1 \\ v_2 & w_2 & y_2 - y_1 \\ v_3 & w_3 & z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

y entonces:

$$r(A) = 2 \Longrightarrow r \nparallel s \Longrightarrow \begin{cases} r(A') = 3, & \text{se cruzan.} \\ r(A') = 2, & \text{se cortan en un punto.} \end{cases}$$

$$r(A) = 1 \Longrightarrow r \parallel s \Longrightarrow \begin{cases} r(A') = 2, & r \neq s \text{ (paralelas y distintas).} \\ r(A') = 1, & r = s \text{ (las rectas son idénticas).} \end{cases}$$

11.1.3. Determinación de un plano

Un plano π puede calcularse de las siguientes formas:

1. Con tres puntos no alineados $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$.
2. Con un punto A y dos vectores directores $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ **linealmente independientes**.
3. Con un punto A y el vector normal $\vec{n} = (a, b, c)$.

Si estamos en el primer caso, los vectores $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ son vectores directores, y así:

Ecuaciones paramétricas

$$\pi \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = x_1 + v_1 t + w_1 s \\ y = y_1 + v_2 t + w_2 s \\ z = z_1 + v_3 t + w_3 s \end{array} \right\} \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Ecuación implícita

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

11.1.4. Posición relativa de dos planos

Dados dos planos

$$\pi_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$
$$\pi_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

Se forman las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

y entonces:

$$r(A) = 2 \Longrightarrow \pi_1 \not\parallel \pi_2 \Longrightarrow r(A') = 2 \Longrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \text{recta } r$$

$$r(A) = 1 \Longrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2 \Longrightarrow \begin{cases} r(A') = 2, & \pi_1 \neq \pi_2 \text{ (planos paralelos y distintos).} \\ r(A') = 1, & \pi_1 = \pi_2 \text{ (los planos son idénticos).} \end{cases}$$

11.1.5. Paralelismo de recta y plano

Sean

$$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0 \quad \text{y} \quad r \equiv \begin{cases} P(x_1, y_1, z_1) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{cases}$$

Entonces tenemos el siguiente criterio:

$$r \parallel \pi \Longleftrightarrow av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$$

11.1.6. Haz de planos

Dados dos planos **independientes**

$$\pi_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$
$$\pi_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

la combinación lineal

$$\pi_{\lambda,\mu} \equiv \lambda(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) + \mu(a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2)$$

se llama haz de planos. Cualquier plano del haz contiene a la recta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

11.1.7. Recta que toca a otras dos

Dadas dos rectas

$$r \equiv \begin{cases} P\,(x_1, y_1, z_1) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} Q\,(x_2, y_2, z_2) \\ \vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \end{cases}$$

se trata de hallar una tercera recta m que toque a r y a s y tal que (2 posibilidades):

1. De la recta m se conoce un punto $R\,(x_3, y_3, z_3)$. Falta averiguar el vector $\vec{u} = (a, b, c)$, vector director de m. Resolvemos el sistema homogéneo

$$\left|\vec{v}, \vec{u}, \overrightarrow{RP}\right| = 0$$
$$\left|\vec{w}, \vec{u}, \overrightarrow{RQ}\right| = 0$$

   con lo cual obtenemos $\vec{u}$.

2. De la recta m se conoce un vector director $\vec{u}$. Falta averiguar un punto. Para ello, sea $X(x, y, z)$ un punto cualquiera de m. Formamos el sistema

$$\left|\vec{v}, \vec{u}, \overrightarrow{PX}\right| = 0$$
$$\left|\vec{w}, \vec{u}, \overrightarrow{QX}\right| = 0$$

   y la recta sale como intersección de dos planos.

11.2. Problemas

1. Determinar las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de las rectas que pasan por el punto A y con el vector de dirección dado:

$$\text{a) } A(2,1,-3), \vec{v}=(-1,2,-2) \quad ; \quad \text{b) } A(0,0,0), \vec{v}=(2,-1,-3)$$

<u>Solución</u>:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3 - 2t \end{cases} \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = -3t \end{cases}$$

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-2} \qquad \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-3}$$

2. Determinar dos puntos pertenecientes a las rectas:

$$\text{a) } \frac{x-1}{2} = \frac{2-3y}{3} = 1 - z \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -3z + 2 \end{cases}$$

3. Escribir en forma paramétrica las rectas:

$$\text{a) } \frac{x-1}{3} = y = \frac{2-z}{2} \quad ; \quad \text{b) } x = y = z$$

<u>Solución</u>:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

4. Hallar en forma paramétrica y cartesiana la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,-1,2)$ y con vectores $\vec{r}, \vec{s}$ que se indican como vectores de dirección:

$$\text{a) } \vec{r}=(0,-1,2), \vec{s}=(1,3,2) \quad ; \quad \text{b) } \vec{r}=(0,-1,-3), \vec{s}=(-1,2,-3)$$

<u>Solución</u>:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -1 - t + 3s \\ z = 2 + 2t + 2s \end{cases} \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} x = 1 - s \\ y = -1 - t + 2s \\ z = 2 - 3t - 3s \end{cases}$$

$$8x - 2y - z - 8 = 0 \qquad 9x + 3y - z - 4 = 0$$

5. Pasar a la forma continua y hallar un vector de dirección de las rectas:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = -z - 2 \end{cases} \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 2x - 2 \end{cases}$$

<u>Solución</u>:

$$\text{a) } \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{1} \\ \vec{v} = (2,-1,1) \end{cases} \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+2}{2} \\ \vec{v} = (1,2,2) \end{cases}$$

6. Hallar las ecuaciones paramétricas, ecuación continua y un vector de dirección de la recta:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} x = -7 + t \\ y = -5 + t \\ z = t \end{cases} \quad ; \quad \frac{x+7}{1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z}{1} \quad ; \quad \vec{v} = (1, 1, 1)$$

7. Hallar la ecuación del plano que contenga al punto $P(1, 1, 1)$ y sea paralelo a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

Solución: $x - y - 2z + 2 = 0$

8. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 1, 2)$ y es paralelo a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 4x + z = 0 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ y - z = -3 \\ z = t \end{cases}$$

Solución: $x - 5y + 4z - 4 = 0$

9. Obtener las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(1, 2, 2)$ y es paralela a la recta:

$$\begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$$

Solución: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{1}$

10. Obtener las ecuaciones de la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Solución: $\frac{x}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$

11. Averiguar si son paralelos los planos π_1, π_2 de cada uno de los apartados siguientes:

$$\text{a)} \begin{cases} \pi_1 \equiv x - y + z = 0 \\ \pi_2 \equiv x - y = 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{b)} \begin{cases} \pi_1 \equiv x + y = 0 \\ \pi_2 \equiv x = 2 \end{cases}$$

Solución: No, No

12. Hallar las ecuaciones de los ejes y planos de coordenadas.

Solución:

$$\text{Eje x} \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{Eje y} \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{Eje z} \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Plano } xy \equiv z = 0 \quad ; \quad \text{Plano } yz \equiv x = 0 \quad ; \quad \text{Plano } xz \equiv y = 0$$

13. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$$

y es paralelo al vector de extremos $A(2,0,0), B(0,1,0)$.

Solución: $x + 2y - 8z - 3 = 0$

14. Dados los puntos $A(1,0,2), B(0,1,3), C(-1,2,0), D(2,-1,3)$, hallar la ecuación del plano que contiene a la recta que pasa por AB y es paralelo a la recta que pasa por CD.

Solución: $x + y - 1 = 0$

15. Sean las rectas $\vec{x} = (1,1,1) + \lambda(2,1,-1), \vec{x} = \mu(3,0,1)$. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo a ambas rectas.

Solución: $x - 5y - 3z = 0$

16. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-1,2,0)$ y contiene a la recta:

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

Solución: $3x - 14y - 21z + 31 = 0$

17. Hallar los valores de a para que sean paralelas las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y}{2a} = \frac{z}{1} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = -t \\ y = -2 - 2t \\ z = -at \end{cases}$$

Solución: $a = \pm 1$

18. Estudiar si las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{-1} \quad ; \quad s \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$$

son coplanarias. En caso afirmativo, hallar la ecuación del plano que las contiene.

Solución: Sí, $x + y - z + 1 = 0$

19. Dadas la recta r y el plano π:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases} \quad ; \quad \pi \equiv 2x + y + mz = n$$

determinar la relación (o valores) entre m y n de modo que:

- r y π sean secantes.
- r y π sean paralelos y $r \not\subset \pi$.
- r esté contenida en π

Solución: $7m + 23 \neq 0$; $m = -\frac{23}{7}, n \neq \frac{9}{7}$; $m = -\frac{23}{7}, n = \frac{9}{7}$

20. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1,1,2)$ y se apoya en las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1} \quad ; \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$$

Solución: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{-1}$

21. Hallar las ecuaciones de una recta paralela al vector $\vec{u} = (1,2,3)$ y que corte a las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = 2z+1 \\ y = -z+2 \end{cases}$$

Sugerencia: Estudiar previamente la posición relativa entre r y s.
Solución: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

22. Averiguar si los puntos $A(1,0,4), B(3,0,1), C(2,0,0), D(0,4,0)$ son o no coplanarios.
Solución: No

23. Obtener la condición para que sean coplanarios los puntos

$$A(1,0,1) \; ; \; B(1,1,0) \; ; \; C(0,1,1) \; ; \; D(a,b,c)$$

Solución: $a+b+c=2$

24. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1,-3,0)$ y es paralela a la recta:

$$\begin{cases} x = z+2 \\ y = z-3 \end{cases}$$

Solución: $\frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{1}$

25. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,0,-1)$ y es paralela a la recta:

$$\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x-2y+z-1=0 \end{cases}$$

Solución: $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}$

26. Hallar la ecuación del plano paralelo a

$$-x-2y+3z-7=0$$

que pasa por el punto $(1,2,-2)$
Solución: $x+2y-3z-11=0$

27. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$$

y pasa por el origen.
Solución: $x-2y+z=0$

28. Hallar la ecuación del plano que pasa por $(1,0,0)$ y contiene a la recta:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 3t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

Solución: $9x + y - 3z - 9 = 0$

29. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es paralelo al plano determinado por el punto $(1,-1,0)$ y a la recta que pasa por el punto $(2,2,2)$ y tiene por vector director $(1,2,3)$.

Solución: $5x - y - z = 0$

30. Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = 3z + 2 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = z + 4 \\ y = 2z + 7 \end{cases}$$

Averiguar sin son coplanarias y si lo son hallar el punto de intersección.

Solución: No son coplanarias.

31. Estudiar las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas. En caso de corte, hallar el punto de intersección:

- $r \equiv x = y = z \quad ; \quad s \equiv 2x + 1 = 2y = 2z + 2$
- $r \equiv x - 1 = y - 2 = \dfrac{z-3}{3} \quad ; \quad s \equiv \dfrac{x-1}{3} = y - 2 = \dfrac{z-3}{2}$

Solución: Son paralelas ; Se cortan en el punto $(1,2,3)$.

32. Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = -z \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

Solución: Se cruzan.

33. Determinar a para que las siguientes rectas se corten y hallar el punto de corte:

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+a}{2} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = -4 + 5t \end{cases}$$

Solución: $a = 1$, $(5,2,1)$.

34. Averiguar para qué valor de m se cortan las siguientes rectas y hallar el punto de corte:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{5} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x + 2y + z - m = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Solución: $m = \frac{25}{4}$, $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{21}{4}\right)$.

35. Sean las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 5z = \lambda(x-3)+10 \\ 5y = x+2 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \frac{x-1}{-5} = \frac{y}{\lambda} = \frac{z-1}{2}$$

- Demostrar que se cruzan para todo valor de λ.
- Hallar para qué valor de λ la recta s es paralela al plano $2x+3y-z+1=0$.

Solución: $\lambda = 4$.

36. Para cada número real λ se considera el plano π de ecuación:

$$\pi \equiv (2\lambda+1)x + (1-\lambda)y + (1+3\lambda)z + 2\lambda - 1 = 0$$

Demostrar que todos los planos anteriores pasan por una recta r y calcular las ecuaciones paramétricas de dicha recta.

Solución:

$$\begin{cases} x = -3-4t \\ y = 2+t \\ z = 2+3t \end{cases}$$

37. Estudiar la posición relativa de la recta:

$$\begin{cases} x = 3t-1 \\ y = t+2 \\ z = 2t \end{cases}$$

y el plano determinado por los puntos $A(1,3,2), B(2,0,1), C(1,4,3)$.

Solución: Se cortan en el punto $\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

38. Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2z+p \\ y = -z+3 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = -z+1 \\ y = 2z+q \end{cases}$$

- Hallar la condición que deben cumplir p y q para que las rectas estén contenidas en un plano.
- Determinar p, q para que el plano pase por el punto $(1,1,1)$.

Solución: $q-p=2$; $p=-2, q=0$.

39. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el origen y corta a las rectas:

$$x = 2y = z-1 \quad ; \quad \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$$

Solución: $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$

40. Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x-2y+z+1=0 \\ 2x+y-2z+2=0 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x-y+z=-8 \\ 2x+3y-z=-8 \end{cases}$$

Hallar la ecuación de la recta que se apoya en ambas y pasa por el punto $(8,5,4)$.

Solución: $\frac{x-8}{-2} = \frac{y-5}{23} = \frac{z-4}{37}$

41. Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y = z \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Obtener la ecuación de la recta que se apoya en ambas y tiene como vector director $(-1, 3, -1)$.

Solución: $\frac{x-17}{-1} = \frac{y-8}{3} = \frac{z-8}{-1}$

42. Dadas las rectas:

$$r \equiv x = y = z \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad ; \quad t \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Hallar las ecuaciones de la recta que se apoya en r y s y es paralela a t.

Solución: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}$

43. Hallar el valor de k para que los planos:

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv x + y + z = 2 \\ \pi_2 &\equiv 2x + 3y + z = 3 \\ \pi_3 &\equiv kx + 10y + 4z = 11 \end{aligned}$$

tengan una recta común y hallar las ecuaciones paramétricas de dicha recta.

Solución:

$$k = 7 \quad ; \quad \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$$

44. Estudiar la posición relativa de los planos:

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv mx + y - z = 1 \\ \pi_2 &\equiv 2x - y + mz = 3m \\ \pi_3 &\equiv x - 2y + (m+1)z = 3m - 1 \end{aligned}$$

según los distintos valores de m.

Solución: Si $m = 1$ los tres planos pasan por una recta. Si $m \neq 1$ los tres planos se cortan en un punto.

45. Determinar a y b para que los planos:

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv 2x - y + z = 3 \\ \pi_2 &\equiv x - y + z = 2 \\ \pi_3 &\equiv 3x - y - az = b \end{aligned}$$

se corten en una recta r. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $(2, 1, 3)$.

Solución: Si $a = -1, b = 4, x + y - z = 0$

46. Determinar si las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

se cortan o se cruzan.

Solución: Se cruzan.

47. Calcular, describiendo el procedimiento empleado, las ecuaciones de una recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta en que se cortan los planos

$$\Pi_1 \equiv x - y + 2z + 1 = 0 \quad ; \quad \Pi_2 \equiv x + 3y - z + 2 = 0$$

Solución: $\frac{x}{-5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$.

48. Sean las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-m}{-1} \quad ; \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{m} = \frac{z+1}{2}$$

(1) ¿Para qué valor de m están r y s contenidas en un mismo plano?.

(2) En el caso en que $m = 1$, hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, 1, 2)$ y corta a r y a s.

Solución: $m = 0$; $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{1}$

49. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1, 0, 2)$ y corta a las rectas r y s dadas por

$$r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} 2x + 6y + 2 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Solución: $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{-2}$

50. Consideremos los tres planos siguientes:

$$\pi_1 \equiv x + y + z = 1, \quad \pi_2 \equiv x - y + z = 2, \quad \pi_3 \equiv 3x + y + 3z = 5$$

¿Se cortan π_1 y π_2?. ¿Hay algún punto que partenezca a los tres planos?.

Solución: Sí, No.

51. **Selectividad Junio 2001**. Calcular a sabiendo que los planos

$$ax + y - 7z = -5 \quad \text{y} \quad x + 2y + a^2 z = 8$$

se cortan en una recta que pasa por el punto $A(0, 2, 1)$ pero que no pasa por el punto $B(6, -3, 2)$.

Solución: $a = -2$.

52. **Selectividad Junio 2002**. Calcular la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$ con la recta $s \equiv \dfrac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralela a la recta

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Solución: $\frac{x+9}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+4}{-13}$

53. **Selectividad septiembre 2009**. Consideremos el punto $P(1,0,0)$ y las rectas r y s definidas como

$$r \equiv x-3 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2}, \quad s \equiv (x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(-1,2,0)$$

- Estudiar la posición relativa de r y s.
- Hallar la ecuación del plano π que pasando por P es paralelo a r y a s.

Solución: se cruzan; $\pi \equiv 2x + y + 2z - 2 = 0$.

54. **Selectividad septiembre 2010**. Hallar la ecuación del plano π que es paralelo a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y + 11 = 0 \\ 2y + z - 19 = 0 \end{cases}$$

y contiene a la recta:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

Solución: $\pi \equiv 8x + 6y + 11z - 18 = 0$.

55. **Selectividad septiembre 2010**. Consideremos los planos π_1, π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv x + y = 1, \quad \pi_2 \equiv ay + z = 0, \quad \pi_3 \equiv x + (a+1)y + az = a + 1$$

a) ¿Cuánto ha de valer a para que no tengan ningún punto en común?.

b) Para $a = 0$, determinar la posición relativa de los planos.

Solución: $a = 1$; para $a = 0$, los planos se cortan en una recta.

56. **Selectividad junio 2011**. Consideremos los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(2,1,0)$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$

a) Determinar la ecuación del plano π que es paralelo a r y pasa por A y B.

b) Determinar si la recta que pasa por los puntos $P(1,2,1)$ y $Q(3,4,1)$ está contenida en dicho plano.

Solución: $\pi \equiv y - z - 1 = 0$; No.

Capítulo 12

Geometría Euclídea

12.1. Resumen teórico

12.1.1. Producto escalar de dos vectores

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores. Entonces, el producto escalar de ellos, el cual se escribe como $\vec{a} \cdot \vec{b}$, es el número

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \Longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$$

La norma, módulo o longitud de un vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, escrita como $||\vec{a}||$, es el número

$$||\vec{a}|| = +\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \Longrightarrow ||\vec{a}||^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$$

Se tienen las siguientes propiedades:

[1] $\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}||\ ||\vec{b}|| \cos\varphi$, siendo $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ el ángulo que forma el vector $\vec{a}$ con el vector $\vec{b}$. De aquí se deduce la desigualdad de Schwarz

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq ||\vec{a}||\ ||\vec{b}||$$

dándose la igualdad si y solo si los vectores son linealmente dependientes.

[2] **El producto escalar es conmutativo**. En otras palabras, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

[3] **El producto escalar es distributivo respecto de la suma**. En otras palabras,

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

[4] Si λ es cualquier número real, tenemos

$$\big(\lambda\vec{a}\big) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \big(\lambda\vec{b}\big)$$

[5] $\vec{a} \cdot \vec{0} = 0$, para cualquier vector $\vec{a}$.

[6] Dos vectores son perpendiculares (u ortogonales) cuando forman un ángulo de $90° = \dfrac{\pi}{2}$ rad. Si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares lo escribiremos como $\vec{a} \perp \vec{b}$. Tenemos el siguiente criterio

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

[7] La norma cumple las siguientes propiedades:

$$||\lambda\vec{a}|| = |\lambda|\ ||\vec{a}||, \qquad ||\vec{a}+\vec{b}|| \leq ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||$$

[8] La distancia entre dos puntos A y B, escrita como $d(A,B)$ es

$$d(A,B) = ||\overrightarrow{AB}||$$

La función distancia d cumple las siguientes propiedades:

a) $d(A,A) = 0$.

b) **Simetría**. $d(A,B) = d(B,A)$.

c) **Desigualdad triangular**.

$$d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$$

12.1.2. Propiedad fundamental

Dado un plano $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$, el vector $\vec{n} = (a,b,c)$ formado por los coeficientes de la x, y, z es tal que $\vec{n} \perp \pi$, es decir, el vector $\vec{n}$ es normal al plano, luego un plano queda determinado por un punto y el vector normal.

12.1.3. Ángulo de dos rectas r y s

Por definición, es **el ángulo agudo que forman sus vectores directores**. En otras palabras, si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son los vectores directores de la primera y segunda rectas, entonces

$$\varphi = \widehat{(r,s)} \Longrightarrow \cos\varphi = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{||\vec{v}||\ ||\vec{w}||}$$

12.1.4. Ángulo de dos planos

Dados dos planos

$$\begin{array}{ll} \pi_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, & \vec{n_1} = (a_1, b_1, c_1) \\ \pi_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, & \vec{n_2} = (a_2, b_2, c_2) \end{array}$$

Entonces

$$\varphi = \widehat{(\pi_1,\pi_2)} \Longrightarrow \cos\varphi = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{||\vec{n_1}||\ ||\vec{n_2}||}$$

12.1.5. Ángulo de recta y plano

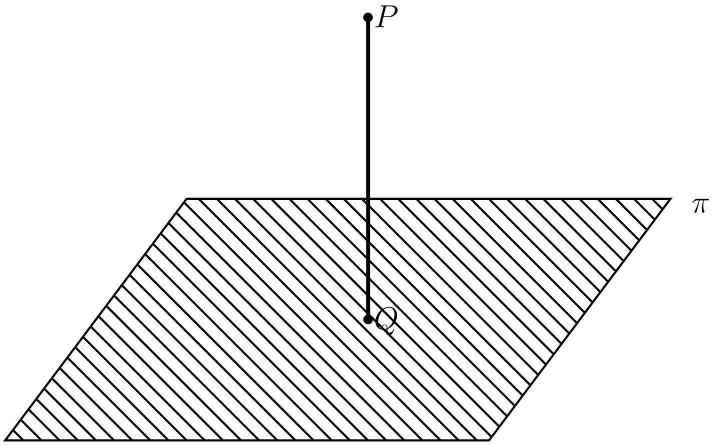
Sea $\vec{v}$ el vector director de la recta r y $\vec{n}$ el vector normal del plano π, entonces:

$$\varphi = \widehat{(r,\pi)} \Longrightarrow \operatorname{sen}\varphi = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{||\vec{v}||\ ||\vec{n}||}$$

¡¡Ojo con la expresión anterior!!, ya que es el seno y no el coseno.

12.1.6. Distancia de un punto P a un plano π

Por definición es la distancia del punto P al punto Q, siendo Q el punto de corte de la perpendicular a π que pasa por P con π (ver siguiente figura)



En estas condiciones, si $P(x_1, y_1, z_1)$ y $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$, entonces:

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

12.1.7. Producto exterior de dos vectores

Dados dos vectores $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, el producto exterior (o vectorial) de estos dos vectores es el siguiente vector, escrito en forma simbólica:

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right)$$

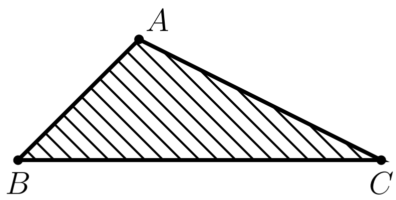
formado por los adjuntos de la primera fila. Léase **v exterior w**. Es un **vector perpendicular tanto a $\vec{v}$ como a $\vec{w}$**. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge \vec{v}$.
2. Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son dependientes, entonces $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$.
3. $||\vec{v} \wedge \vec{w}|| = ||\vec{v}||\ ||\vec{w}|| \operatorname{sen} \varphi$, siendo $\varphi = \widehat{(\vec{v}, \vec{w})}$.
4. La norma del producto exterior $||\vec{v} \wedge \vec{w}||$ es el área del paralelogramo formado con estos dos vectores.

12.1.8. Área de un triángulo

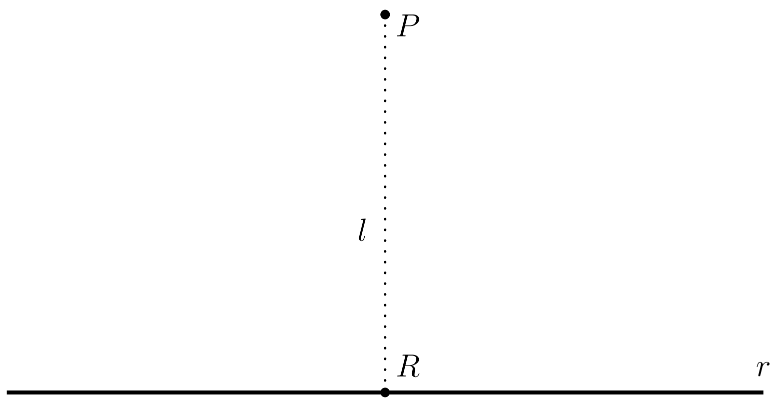
Dado un triángulo con vértices en los puntos A, B, C, el área S de dicho triángulo es

$$S = \frac{1}{2} ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$$



12.1.9. Distancia de un punto a una recta

Dado un punto P y una recta r, la distancia del punto P a la recta r es la distancia que se observa en la figura, en concreto, la distancia de P al punto R, el cual es el corte del plano π perpendicular a r que pasa por P con la misma r (ver figura):



Para el cálculo es necesario averiguar un punto cualquiera Q de la recta r, y un vector director $\vec{v}$ (de r), y entonces

$$l = d(P, r) = \frac{||\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{v}||}{||\vec{v}||}$$

12.1.10. Volumen de un tetraedro

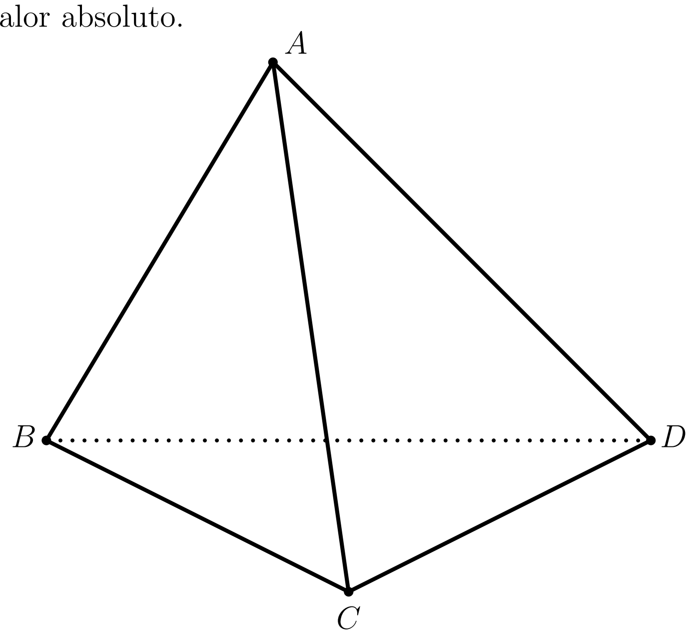
Sea un tetraedro dado por cuatro puntos no coplanarios:

$$A\,(a_1, a_2, a_3)\,,\ B\,(b_1, b_2, b_3)\,,\ C\,(c_1, c_2, c_3)\,,\ D\,(d_1, d_2, d_3)$$

el volumen es:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

como es natural, en valor absoluto.



12.1.11. Cálculo de la perpendicular común a dos rectas

Dadas dos rectas $r \equiv (P, \vec{v})$, $s \equiv (Q, \vec{w})$, la perpendicular común tiene como vector director $\vec{d} = \vec{v} \wedge \vec{w}$, y toca a las otras dos, luego el problema **queda reducido al caso segundo de la sección 11.1.7, pág. 115**.

12.1.12. Distancia entre dos rectas que se cruzan

Dadas dos rectas $r \equiv (P, \vec{v})$, $s \equiv (Q, \vec{w})$ que se cruzan, la distancia entre ambas es:

$$d(r, s) = \frac{|\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{PQ}|}{||\vec{v} \wedge \vec{w}||}$$

12.2. Problemas

1. Calcular los vectores de longitud 1 ortogonales a los vectores $(2, -2, 3), (3, -3, 2)$.

   Solución: $\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right]$.

2. Calcular el ángulo que forman las rectas:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z+1}{5} \\ \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-1}{5} \end{cases}$$

   Solución: $\frac{\pi}{2}$ rad.

3. Calcular el ángulo que forman las rectas:

$$r \equiv x = y = z \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

   Solución: $\frac{\pi}{2}$ rad.

4. Calcular el área del triángulo de vértices $A(0, 0, 0), C(1, 1, 0)$, y el tercer vértice es el punto de intersección de la recta:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{1}$$

   con el plano XY.

   Solución: 1.

5. Hallar la distancia del punto $A(1, 2, 3)$ a la recta r de ecuación $x = 0, z = 0$ como asimismo la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.

   Solución: $\sqrt{10}$; $y - 2 = 0$.

6. Dado el triángulo de vértices $A(1, 1, 1), B(0, 3, 5), C(4, 0, 2)$, hallar su área y las longitudes de sus tres alturas.

   Solución: $\frac{\sqrt{230}}{2}$; $\frac{\sqrt{230}}{\sqrt{34}}, \frac{\sqrt{230}}{11}, \frac{\sqrt{230}}{21}$.

7. Hallar el área del triángulo de vértices $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$.

   Solución: $\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}$

8. Hallar la distancia del punto $(3, 4, 5)$ a la recta:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+5}{-1}$$

   Solución: $\sqrt{146}$

9. Hallar el volumen del tetraedro de vértices $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$.

   Solución: $\frac{1}{6}$

10. Hallar el volumen del tetraedro que forman los planos:

$$\begin{array}{l} \pi_1 \equiv y = 0 \\ \pi_2 \equiv z = 0 \\ \pi_3 \equiv x - y = 0 \\ \pi_4 \equiv 3x + 2y + z - 15 = 0 \end{array}$$

<u>Solución</u>: $\frac{75}{2}$

11. Se consideran las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2} \quad ; \quad s \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

- Comprobar que se cortan y hallar las coordenadas del punto P de intersección.
- Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y s.

<u>Solución</u>: $P(1,2,1)$; $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-1}{1}$

12. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,2,1)$ y es perpendicular al plano que pasa por dicho punto y contiene a la recta:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$$

<u>Solución</u>: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{2}$

13. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(1,2,-1)$, es paralela al plano $2x + y - z = 3$ y es perpendicular a la recta:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 3t \end{array} \right.$$

<u>Solución</u>: $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+1}{3}$

14. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(-1,1,0)$ y cuya dirección es perpendicular a la de las rectas:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = z \end{array} \right. \quad ; \quad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 2 \\ y - z = 1 \end{array} \right.$$

<u>Solución</u>: $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{-4} = z$

15. Hallar la recta perpendicular e incidente al eje OZ por el punto $(1,2,3)$.

<u>Solución</u>: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{0}$

16. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0,0,0)$ y es perpendicular al plano $2x + 3y + z - 7 = 0$.

<u>Solución</u>: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$

17. Escribir las ecuaciones de la perpendicular común a las rectas:

$$x = y = z \quad ; \quad x = y = 3z - 1$$

<u>Solución</u>: $\frac{x-1/2}{1} = \frac{y-1/2}{-1} = \frac{z-1/2}{0}$

18. Calcular la ecuación del plano (o planos) que contienen al eje OX y distan 6 unidades del punto $(0, 10, 0)$.

    Solución: Dos planos: $3y + 4z = 0, 3y - 4z = 0$.

19. Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta:

    $$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{-1}$$

    y que corta al eje X en el punto de abscisa 3.

    Solución: $2x + 3y - z - 6 = 0$.

20. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta:

    $$\frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

    y perpendicular al plano $x - y + z = 0$.

    Solución: $4x + 3y - z - 8 = 0$.

21. Sea el punto $A(1, 1, 3)$ y la recta:

    $$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

    Hallar:

    - Ecuación del plano perpendicular a r que pasa por A.
    - La intersección de este plano con r.
    - La distancia de A a r.

    Solución: $x + y + 2z - 8 = 0$; $(1, 3, 2)$; $\sqrt{5}$.

22. Determinar un punto de la recta:

    $$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$$

    que equidiste de los planos $3x + 4y - 1 = 0, 4x - 3z - 1 = 0$. ¿Es única la solución?.

    Solución: Dos puntos: $(\frac{19}{8}, \frac{17}{16}, -\frac{5}{8}), (\frac{3}{10}, -\frac{41}{20}, -\frac{27}{10})$

23. Dada la recta:

    $$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

    y los puntos $A(2, 1, 0), B(1, 1, 2)$:

    - ¿Son paralelas las rectas AB y r?.
    - Determinar un punto C de r tal que $\vec{CA}$ y $\vec{CB}$ sean perpendiculares.

    Solución: No; Hay dos puntos: $(1, 2, 1)$ y $(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3})$.

24. Dada la recta:
$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$$
y el punto $P(1,2,1)$, calcular:

- Las ecuaciones de la recta s que pasa por P y corta perpendicularmente a r.
- El punto de intersección de r y s.
- Las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

Solución:

- $\frac{x-1}{-7} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$.
- $(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})$.
- $(-\frac{11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$.

25. Dada la recta r de ecuación:
$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$
y el punto $P(1,2,-2)$. Hallar las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

Solución: $(\frac{13}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{16}{7})$.

26. Para cada número real λ se considera el plano:
$$\pi_\lambda = (1+2\lambda)x + (1-\lambda)y + (1+3\lambda)z + 2\lambda - 1 = 0$$
Demostrar que todos los planos π_λ pasan por una recta r. Encontrar dicha recta asi como la distancia de la recta r anterior a la recta:
$$r' \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$$
Solución:
$$r \equiv \begin{cases} x = -3-4t \\ y = 2+t \\ z = 2+3t \end{cases} \quad ; \quad d(r,r') = \frac{19\sqrt{35}}{35}$$

27. El espacio euclídeo tridimensional E está referido a una base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ formada por vectores unitarios que forman entre sí ángulos de $\frac{\pi}{3}$. Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\vec{u} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$ y $\vec{v} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3}$.

Solución: $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

28. Calcular los valores de x e y para que el vector $(x,y,1)$ sea ortogonal a los vectores $(3,2,0)$ y $(2,1,-1)$.

Solución: $x = 2$ y $y = -3$.

29. Hallar la ecuación del plano que es perpendicular al vector $\vec{v} = (2,1,-4)$ y pasa por el punto $P(-3,2,4)$.

Solución: $2x + y - 4z + 20 = 0$.

30. Dado el tetraedro de vértices:

$$A(4,0,0) \quad ; \quad B(0,3,0) \quad ; \quad C(0,0,2) \quad ; \quad D(3,2,4)$$

Hallar:

(1) La longitud de la arista AB.
(2) Ecuación de la cara ABC.
(3) Ecuación de la arista AD.
(4) Ecuación del plano que pasa por la arista AB y el punto medio de la arista opuesta.
(5) Ángulo que forman las aristas AC y AB.
(6) Ecuación del plano que pasa por la arista AB y es perpendicular a la cara ABC.
(7) Ecuación de la recta que pasa por el vértice D y es perpendicular a la cara ABC.
(8) Longitud de la altura relativa al vértice D.
(9) Ángulo de las caras ABC y ACD.
(10) Ángulo de la arista AD y la cara ABC.
(11) Volumen del tetraedro.

Solución:

(1) 5
(2) $3x + 4y + 6z - 12 = 0$
(3) $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{-4}$
(4) $18x + 24y + 7z - 72 = 0$
(5) $\arccos\left(\dfrac{8\sqrt{5}}{25}\right)$
(6) $18x + 24y - 25z - 72 = 0$
(7) $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-4}{6}$
(8) $\dfrac{29}{\sqrt{61}}$
(9) $\arccos\left(\dfrac{2}{\sqrt{61}\sqrt{69}}\right)$
(10) $\arcsin\left(\dfrac{29}{\sqrt{61}\sqrt{21}}\right)$
(11) $\dfrac{29}{3}$

31. Hallar sobre la recta:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 11 = 0 \\ 2x - y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

un punto P equidistante de los puntos $P_1(0,1,1)$ y $P_2(1,2,1)$.

Solución: $P(3,-1,2)$.

32. Dadas las rectas:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{3} \quad ; \quad \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{2}$$

Demostrar que se cortan y hallar el punto de intersección, el ángulo que forman y la ecuación del plano que determinan.

Solución: $P(7,6,5)$; $\alpha=\arccos\left(\frac{14}{3\sqrt{22}}\right)$; $x-z-2=0$.

33. Hallar las coordenadas del punto P de la recta:

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z+4}{3}$$

que equidista del punto $Q(3,2,1)$ y del origen de coordenadas.

Solución: $P(1,1,2)$.

34. Hallar el ángulo que forma la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 3x-y-z+1=0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$$

y el plano $\pi \equiv 2x-y+4z-2=0$.

Solución: $\alpha=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{10}{\sqrt{322}}\right)$

35. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(2,1,-3)$ y $P_2(4,2,1)$ y es perpendicular al plano de ecuación:

$$2x-y-z+3=0$$

Solución: $3x+10y-4z-28=0$.

36. Se tiene un paralelogramo uno de cuyos vértices es el punto $(3,2)$ y dos de cuyos lados se encuentran contenidos, respectivamente, en las rectas r y s de ecuaciones

$$r \equiv 2x+3y-7=0, \quad s \equiv x-3y+4=0$$

Hallar las ecuaciones de las rectas sobre las que se encuentran los otros dos lados.

Solución: $2x+3y-12=0$, $x-3y+3=0$.

37. Se consideran los puntos $A(2,-1,-2)$ y $B(-1,-1,2)$.

(1) Determinar los puntos del segmento AB que lo dividen en tres segmentos iguales.

(2) Encontrar un punto C sobre la recta r de ecuaciones

$$r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$$

de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en C.

Solución: $A_1\left(1,-1,-\frac{2}{3}\right)$, $A_2\left(0,-1,\frac{2}{3}\right)$. Dos soluciones para C que son $C_1\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$, $C_2\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0\right)$.

38. Un punto M se mueve en el espacio tridimensional de manera que en un instante de tiempo t se encuentra en el punto $(1+t, 3+t, 6+2t)$.

    (1) ¿Es esta trayectoria una línea recta?. Si es así, escribir sus ecuaciones de dos formas distintas.

    (2) Hallar el instante de tiempo en el que el punto está en el plano dado por la ecuación $x-2y+z-7=0$.

    (3) Hallar la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la trayectoria de M y pasa por el punto $(1,1,0)$.

    Solución: Sí, $r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 3+t \\ z = 6+2t \end{cases}$, $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-6}{2}$; a los $t = 6$ seg.; $\dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{-4}$.

39. Se considera el punto $P(-1,2,1)$.

    (1) Determinar un punto Q del plano $\pi \equiv -3x+y+z+5=0$ de forma que el vector PQ sea perpendicular al plano π.

    (2) Determinar un punto M de la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-10}{-1}$ de forma que el vector MP sea paralelo al plano π.

    (3) Calcular el área del triángulo MPQ.

    Solución: $Q(2,1,0)$, $M(1,0,9)$, Superficie $= 3\sqrt{22}$.

40. Definir el producto escalar de vectores de $\mathbb{R}^3$ y enunciar tres de sus propiedades. Encontrar un vector $\vec{w}$ cuya primera componente sea 2 y que sea perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1,-1,3)$ y $\vec{v} = (0,1,-2)$.

    Solución: $\vec{w} = (2,-4,-2)$.

41. ¿Cuál es el punto P de la recta r dada por

$$r \equiv \begin{cases} x+y+2z = 1 \\ x-2y-4z = 1 \end{cases}$$

    que está más cerca del punto $A(2,3,-1)$?. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son A, P y $B(1,0,0)$.

    Solución: $P\left(1, \dfrac{14}{5}, -\dfrac{7}{5}\right)$, Superficie $= \dfrac{7\sqrt{6}}{10}$.

42. Sea π el plano que pasa por los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,1)$ y $(1,1,1)$. Sea A el punto $(1,2,3)$ y sea B el simétrico de A respecto del plano π. Hallar la recta que pasa por A y por el punto medio del segmento AB. Calcular la recta paralela a la anterior que pasa por el punto $(2,2,2)$.

    Solución: $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}$, $\frac{x-2}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

43. Sea A la matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & a & b \\ c & -a & d \end{pmatrix}$$

Hallar a, b, c y d sabiendo que:

(I) El vector cuyas coordenadas son las que aparecen en la primera columna de A es ortogonal al vector $(1, -1, 1)$.

(II) El producto vectorial del vector cuyas coordenadas son los de la tercera columna de A por el vector $(1, 0, 1)$ es el vector $(-2, 3, 2)$.

(III) El rango de la matriz A es 2.

Solución: $a = -\frac{6}{5}$, $b = -2$, $c = 1$, $d = -4$.

44. Un objeto se mueve en el espacio siguiendo una línea recta cuya dirección viene dada por el vector $\vec{v} = (1, 2, -1)$. En su movimiento, dicho objeto pasa por el punto $A(2, 1, 2)$.

(1) Calcular los puntos de corte de la trayectoria del objeto con los planos coordenados.

(2) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a dicha trayectoria.

(3) ¿Cuál es el ángulo que forma la trayectoria del objeto con el plano OXY?.

Solución: $(0, -3, 4)$, $\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}\right)$, $(4, 5, 0)$; $x + 2y - z = 0$; $\phi = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

45. Se considera el plano π y la recta r dados por

$$\pi \equiv ax + 2y - 4z + b = 0, \quad r \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$$

(1) Hallar los valores de a y b para los que r está contenida en π.

(2) ¿Existen algún valor de a y algún valor de b para los que la recta dada r es perpendicular al plano π?.

Solución: $a = 3$, $b = -23$; Ninguno.

46. Un paralelogramo cuyo centro es $M\left(\dfrac{3}{2}, 3, 4\right)$ tiene por vértices los puntos $A(1, 2, 3)$ y $B(3, 2, 5)$.

(1) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices.

(2) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por M y es perpendicular al plano que contiene al paralelogramo.

(3) Calcular el área del paralelogramo.

Solución: $C(2, 4, 5)$, $D(0, 4, 3)$; $r \equiv \dfrac{x - \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-4}{-2}$; Superficie $= 6$.

47. Hallar el punto Q simétrico del punto $P(2,0,1)$ respecto de la recta r que pasa por el punto $A(0,3,2)$ y es paralela a la recta s de ecuaciones

$$s \equiv \begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

<u>Solución</u>: $Q\left(\frac{18}{5}, \frac{16}{5}, 3\right)$.

48. Sea π el plano de ecuación $\pi \equiv 3x-2y-6z=1$ y sea r la recta dada en forma vectorial por

$$r \equiv (x,y,z) = (1,0,1) + \lambda(2,-1,1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(1) ¿Cómo se define la relación de paralelismo entre una recta y un plano?.

(2) En el caso concreto de la recta r y el plano π, comprobar si son paralelos.

(3) ¿Cómo se define la relación de perpendicularidad entre una recta y un plano?.

(4) En el caso concreto de la recta r y el plano π, comprobar si son perpendiculares.

<u>Solución</u>: No son paralelos ni perpendiculares.

49. Hallar la distancia entre el origen de coordenadas y la recta intersección de los planos de ecuaciones respectivas $x+y+2z=4$ y $2x-y+z=2$.

<u>Solución</u>: $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

50. Calcular las coordenadas del punto simétrico del $(1,-3,7)$ respecto de la recta dada por las ecuaciones

$$x-1=y+3=\frac{z-4}{2}$$

<u>Solución</u>: $P(3,-1,5)$

51. Hallar las ecuaciones de la recta que se apoya perpendicularmente en las rectas r y s definidas respectivamente por

$$x-1=y-2=\frac{z-1}{-2}, \qquad \frac{x-4}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}$$

<u>Solución</u>: $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2 \\ z=t \end{cases}$

52. Calcular el volumen de un cubo sabiendo que dos de sus caras están, respectivamente, en los planos $2x-2y+z-1=0$ y $2x-2y+z-5=0$.

<u>Solución</u>: $\frac{64}{27}$

53. Hallar las coordenadas del punto simétrico del $(1,2,-2)$ respecto del plano de ecuación

$$3x+2y+z-7=0$$

<u>Solución</u>: $P\left(\frac{13}{7}, \frac{18}{7}, -\frac{12}{7}\right)$

54. Hallar la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es $(-1, 2, 1)$

    Solución: $x - 2y - z + 6 = 0$

55. Consideremos los puntos

$$A(1,0,3), \quad B(3,-1,0), \quad C(0,-1,2), \quad D(a,b,-1)$$

    Hallar a y b sabiendo que la recta que pasa por A y B corta perpendicularmente a la recta que pasa por C y D.

    Solución: $a = -\frac{27}{4}$, $b = -\frac{11}{2}$

56. Consideremos los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + 5 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv 3x + 3y - 4 = 0$$

    ¿Qué ángulo determinan ambos planos?. Hallar el plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los dos planos dados.

    Solución: $\frac{\pi}{4}$ rad., $z = 0$

57. Sea r la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$

    a) Hallar los puntos de r cuya distancia al origen es de 7 unidades.

    b) Calcular la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1, 2, -1)$

    Solución: $P(2, -3, -6)$, $Q(-2, 3, 6)$, $2x - 3y - 6z - 2 = 0$

58. Calcular las coordenadas del punto simétrico de $A(0, -1, 1)$ respecto de la recta dada por las ecuaciones

$$\frac{x-5}{2} = y = \frac{z-2}{3}$$

    Solución: $A'(6, -1, -3)$

59. Calcular el punto de la recta $x = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$ que equidiste del punto $A(1, 2, 1)$ y del origen de coordenadas.

    Solución: $(1, 0, 2)$

60. Consideremos el plano $2x + y + 2z - 4 = 0$

    a) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano dado con los ejes coordenados.

    b) Calcular la distancia del origen al plano dado.

    Solución: 6, $\frac{4}{3}$

61. Determinar todos los puntos del plano $\pi \equiv 2x - y + 2z - 1 = 0$ que equidisten de los puntos $A(3, 0, -2)$ y $B(1, 2, 0)$. ¿Qué representan geométricamente?

    Solución: $P(x, y, z)$, con $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = -3 - 4t \\ z = t \end{cases}$. Una recta, intersección del plano mediatriz del segmento AB con el plano π.

62. Consideremos los puntos $A(1,2,3)$, $B(3,2,1)$ y $C(2,0,2)$. Hallar el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano que contiene a A, B y C.

    Solución: $O'(4,0,4)$

63. **Selectividad Junio 2000**. Los puntos $A(3,3,5)$ y $B(3,3,2)$ son vértices consecutivos de un rectángulo $ABCD$. El vértice C consecutivo de B está en la recta de ecuaciones $x = \dfrac{y-6}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$. Determinar los vértices C y D.

    Solución: $C\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{2}, 2\right)$, $D\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{2}, 5\right)$.

64. **Selectividad Septiembre 2000**. Calcular el punto de la recta de ecuaciones

    $$x - 1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-3}$$

    más cercano al punto $A(1,-1,1)$.

    Solución: $P\left(\dfrac{5}{7}, -\dfrac{18}{7}, -\dfrac{1}{7}\right)$.

65. **Selectividad Junio 2001**. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,0,-1)$, es perpendicular al plano $x - y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo a la recta $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

    Solución: $2x - 4y - 3z - 5 = 0$.

66. **Selectividad Junio 2002**. Calcular el área del triángulo de vértices

    $$A(1,1,2), \quad B(1,0,-1), \quad C(1,-3,2)$$

    Solución: 6

67. **Selectividad Junio 2003**. Consideremos los vectores

    $$\vec{u} = (1,1,1), \quad \vec{v} = (2,2,a), \quad \vec{w} = (2,0,0)$$

    a) Hallar los valores de a para los que los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente independientes.

    b) Determinar los valores de a para los que los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{w}$ son ortogonales.

    Solución: $a \neq 2$; $a = -1$.

68. **Selectividad Junio 2003**. Sabiendo que las rectas

    $$r \equiv x = y = z \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

    se cruzan, hallar los puntos A y B, de r y s respectivamente, que están a mínima distancia.

    Solución: $A(1,1,1)$, $B(0,2,1)$.

69. **Selectividad Junio 2003**. Determinar el punto P de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{3}$ que equidista de los planos

$$\pi_1 \equiv x+y+z+3=0 \qquad \text{y} \qquad \pi_2 \equiv \begin{cases} x = -3+\lambda \\ y = -\lambda+\mu \\ z = -6-\mu \end{cases}$$

Solución: $P(-1,-2,-3)$

70. **Selectividad Septiembre 2003**. Se sabe que los puntos $A(1,0,-1)$, $B(3,2,1)$ y $C(-7,1,5)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo $ABCD$.

   a) Calcular las coordenadas del punto D.

   b) Hallar el área del paralelogramo.

   Solución: $D(-9,-1,3)$; Superficie $= 2\sqrt{302}$.

71. **Selectividad Septiembre 2003**. Los puntos $A(1,1,0)$ y $B(2,2,1)$ son vértices consecutivos de un rectángulo $ABCD$. Además, se sabe que los vértices C y D están contenidos en una recta que pasa por el origen de coordenadas. Hallar C y D.

   Solución: $C\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$, $D\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

72. **Selectividad junio 2004**. Sean los puntos $A(1,2,1)$, $B(2,3,1)$, $C(0,5,3)$ y $D(-1,4,3)$.

   a) Probar que los cuatro puntos están en un mismo plano. Hallar la ecuación de dicho plano.

   b) Demostrar que el polígono de vértices consecutivos $ABCD$ es un rectángulo.

   c) Calcular el área de dicho rectángulo.

   Solución: $x-y+2z-1=0$, Superficie $= 2\sqrt{6}$

73. **Selectividad junio 2004**. Dados los vectores $\vec{u} = (2,1,0)$ y $\vec{v} = (-1,0,1)$, hallar un vector unitario $\vec{w}$ que sea coplanario con $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.

   Solución: Dos soluciones, $\vec{w} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$

74. **Selectividad septiembre 2004**. Se sabe que el triángulo ABC es rectángulo en el vértice C, que pertenece a la recta intersección de los planos $y+z=1$ e $y-3z+3=0$, y que sus otros dos vértices son $A(2,0,1)$ y $B(0,-3,0)$. Hallar C y el área del triángulo ABC.

   Solución: $C(0,0,1)$, superficie $= \sqrt{10}$.

75. **Selectividad septiembre 2004**. Hallar la perpendicular común a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x = \beta \\ y = \beta - 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

   Solución: $p \equiv \left\{ \begin{aligned} x+y-2&=0 \\ z&=-1 \end{aligned} \right\}$

76. **Selectividad junio 2005**. Considera el punto $P(2,0,1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+2y=6 \\ z=2 \end{cases}$

   a) Hallar la ecuación del plano que contiene a P y a r.
   b) Calcular el punto simétrico de P respecto de la recta r.

   Solución: $x+2y-4z+2=0$, Punto simétrico $\left(\frac{18}{5},\frac{16}{5},3\right)$.

77. **Selectividad junio 2005**. Sean los vectores $\vec{v_1}=(0,1,0)$, $\vec{v_2}=(2,1,-1)$, $\vec{v_3}=(2,3,-1)$.

   a) ¿Son los vectores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$ linealmente dependientes?.
   b) ¿Para qué valores de a el vector $(4,a+3,-2)$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$?.
   c) Calcular un vector unitario y perpendicular a $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$.

   Solución: Sí; $\forall a \in \mathbb{R}$; $\vec{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

78. **Selectividad septiembre 2005**. Consideremos el plano π y la recta r de ecuaciones:

$$\pi \equiv x+y+mz=3, \quad r \equiv x=y-1=\frac{z-2}{2}$$

   a) Hallar m para que r y π sean paralelos.
   b) Hallar m para que r y π sean perpendiculares.
   c) ¿Existe algún valor de m para que la recta r esté contenida en el plano π?.

   Solución: $m=-1$; $m=2$; No.

79. **Selectividad septiembre 2005**. Sean los planos:

$$\pi_1 \equiv 2x+y-z+5=0, \quad \pi_2 \equiv x+2y+z+2=0$$

   a) Calcular las coordenadas de un punto P, sabiendo que está en el plano π_1 y que su proyección ortogonal sobre el plano π_2 es el punto $(1,0,-3)$.
   b) Calcular el punto simétrico de P respecto del plano π_2.

   Solución: $P\left(-\frac{7}{3},-\frac{20}{3},-\frac{19}{3}\right)$; $\left(\frac{13}{3},\frac{20}{3},\frac{1}{3}\right)$.

80. **Selectividad junio 2006**. Consideremos el plano π y la recta r de ecuaciones:

$$\pi \equiv 2x+y-z+2=0, \quad r \equiv \frac{x-5}{-2}=y=\frac{z-6}{m}$$

   a) Hallar la posición relativa de r y π según los valores del parámetro m.
   b) Para $m=-3$, hallar el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.
   c) Para $m=-3$, hallar el plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π.

   Solución: si $m=-3$, $r \parallel \pi$, en caso contrario ($m \neq -3$), la recta y el plano se cortan en un punto; $x-4y-2z+7=0$; $2x+y-z-4=0$.

81. **Selectividad junio 2006**. Consideremos el punto $P(3,2,0)$ y la recta r de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z-3=0 \\ x+2z+1=0 \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación del plano que contiene a P y a la recta r.

b) Determinar las coordenadas del punto Q, simétrico de P respecto de la recta r.

Solución: $x+2y-4z-7=0$; $Q(-1,0,-2)$.

82. **Selectividad septiembre 2006**. Determinar los puntos de la recta

$$r \equiv \begin{cases} x=0 \\ y-1=\dfrac{z-3}{2} \end{cases}$$

que equidistan de los planos $\pi \equiv x+z=1$, $\pi' \equiv y-z=3$.

Solución: $P_1(0,4,9)$, $P_2\left(0,-\frac{4}{3},-\frac{5}{3}\right)$.

83. **Selectividad septiembre 2006**. Considera los puntos $A(1,0,-2)$ y $B(-2,3,1)$.

a) Determinar los puntos del segmento AB que lo dividen en tres partes iguales.

b) Calcular el área del triángulo de vértices A, B y C, donde C es un punto de la recta de ecuación $-x=y-1=z$. ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto C?.

Solución: $P_1(0,1,-1)$, $P_2(-1,2,0)$; superficie $=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$; No.

84. **Selectividad junio 2007**. Consideremos los planos de ecuaciones $x-y+z=0$ y $x+y-z=2$.

a) Determina la recta que pasa por el punto $A(1,2,3)$ y no corta a ninguno de los planos dados.

b) Determina los puntos que equidistan de $A(1,2,3)$ y $B(2,1,0)$ y pertenecen a la recta intersección de los planos dados.

Solución: $r \equiv \frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}$. Un único punto: $P\left(1,\frac{17}{8},\frac{9}{8}\right)$.

85. **Selectividad junio 2007**. Considera los puntos $A(0,3,-1)$ y $B(0,1,5)$.

a) Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo ABC de vértices A, B y $C(x,4,3)$ tiene un ángulo recto en C.

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $(0,1,5)$ y $(3,4,3)$ y es paralelo a la recta r definida por las ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

Solución: $x=\pm\sqrt{5}$, $\pi \equiv 13x-7y+9z-38=0$.

86. **Selectividad septiembre 2007**. Hallar los dos puntos que dividen al segmento de extremos $A(1,2,1)$ y $B(-1,0,3)$ en tres partes iguales. Determinar la ecuación del plano perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio

    Solución: $X_1\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$, $X_2\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$; $x+y-z+1=0$.

87. **Selectividad junio 2008**. Dada la recta r definida por

    $$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$$

    a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r.

    b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r.

    Solución: $7x-3y-5z=0$, $2x+3y+z=0$

88. **Selectividad junio 2008**. Dados los puntos $A(2,1,1)$ y $B(0,0,1)$, hallar los puntos C en el eje OX tales que el área del triángulo de vértices A, B y C es 2.

    Solución: dos soluciones, $C(\pm\sqrt{11},0,0)$

89. **Selectividad septiembre 2008**. Dada la recta s definida por

    $$s \equiv \begin{cases} x-z=-1 \\ 2y+z=3 \end{cases}$$

    a) Hallar la ecuación del plano π_1 que es paralelo a s y contiene a la recta $r \equiv x-1 = -y+2 = z-3$.

    b) Estudiar la posición relativa de la recta s y el plano $\pi_2 \equiv x+y=3$, y deducir la distancia entre ambos.

    Solución: $\pi_1 \equiv x-z+2=0$; π_2 y s se cortan, luego $d(s,\pi_2)=0$.

90. **Selectividad septiembre 2008**. Dados los puntos

    $$A(1,1,0),\ B(1,1,2),\ C(1,-1,1)$$

    a) Comprobar que no están alineados y calcular el área del triángulo que determinan.

    b) Hallar la ecuación del plano π que contiene al punto A y es perpendicular a la recta determinada por B y C.

    Solución: área $=2$, $\pi \equiv 2y+z=2$.

91. **Selectividad junio 2009**. Se consideran las rectas r y s definidas como:

    $$r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\lambda-2 \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=\mu-1 \\ z=-1 \end{cases}$$

    Hallar la ecuación de la perpendicular común a r y a s.

    Nota: este problema es idéntico al 75.

    Solución: $\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{0}$

92. **Selectividad junio 2009**. Consideremos la recta r definida por $\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$ y la recta s que pasa por los puntos $A(2,1,0)$ y $B(1,0,-1)$.

   a) Estudiar la posición relativa de r y s.

   b) Determinar un punto C de la recta r tal que los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ sean perpendiculares.

   Solución: Se cortan. Dos soluciones: $C(2,0,0)$, $C(1,1,-1)$.

93. **Selectividad septiembre 2009**. Se consideran las rectas r y s definidas como:

$$r \equiv \begin{cases} x-y+3=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} 2y+1=0 \\ x-2z+3=0 \end{cases}$$

   a) Determinar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

   b) ¿Existe algún plano que contenga a r y sea perpendicular a s?. Razonar la respuesta.

   Solución: $\pi \equiv x+3y-2z-5=0$. No.

94. **Selectividad junio 2010**. Sean las rectas

$$r \equiv x-1=y=1-z, \quad s \equiv \begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=1 \end{cases}$$

   a) Determinar el punto de corte.

   b) Hallar el ángulo que forman r y s.

   c) Determinar la ecuación del plano que contiene a r y s.

   Solución: $P(3,2,-1)$; $\varphi = \widehat{(r,s)} = \arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$; $y+z=1$.

95. **Selectividad junio 2010**. Los puntos $P(2,0,0)$ y $Q(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice S pertenece a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases}$$

   a) Calcular las coordenadas del punto S sabiendo que r es perpendicular a la recta que pasa por P y S.

   b) Comprobar si el triángulo es rectángulo.

   Solución: $S(6,0,3)$. El triángulo es rectángulo en P.

96. **Selectividad junio 2011**. Determinar el punto simétrico del punto $A(-3,1,6)$ respecto de la recta:

$$r \equiv x-1=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{2}$$

   Solución: $B(9,1,0)$

97. **Selectividad septiembre 2011**. Consideremos los puntos:

$$A(-1,k,3),\ B(k+1,0,2),\ C(1,2,0),\ D(2,0,1)$$

- ¿Existe algún valor de k para el que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean linealmente dependientes?.
- Calcular los valores de k para los que los puntos A, B, C, D forman un tetraedro de volumen 1.

Solución: Ninguno, $k = -1 \pm \sqrt{5}$.

98. **Selectividad septiembre 2011**. Dados el plano π y la recta r de ecuaciones:

$$\pi \equiv x + 2y - z = 0, \quad r \equiv \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y - 4z = -13 \end{cases}$$

- Hallar el punto P de intersección del plano π y la recta r.
- Hallar el punto Q', simétrico del punto $Q(1,-2,3)$ respecto del plano π.

Solución: $P(2,1,4)$, $Q'(3,2,1)$.

99. **Selectividad junio 2012**. De un paralelogramo $ABCD$ conocemos tres vértices consecutivos: $A(2,-1,0)$, $B(-2,1,0)$ y $C(0,1,2)$.

a) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.
b) Hallar el área de dicho paralelogramo.
c) Calcular el vértice D.

Solución: $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$; Superficie $= 4\sqrt{6}$; $D(4,-1,2)$

100. **Selectividad junio 2012**. Sean r y s las rectas dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 6 \\ x + z = 3 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2}$$

a) Determinar el punto de intersección de ambas rectas.
b) Calcular la ecuación general del plano π que las contiene.

Solución: $P(-1,11,4)$; $\pi \equiv 2x - y + 4z - 3 = 0$

101. **Selectividad septiembre 2012**. Sean los puntos $A(0,0,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$.

a) Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.
b) Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.
c) Calcular la distancia del punto D al plano π.

Solución: $\pi \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0$, $d(D,\pi) = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$

102. **Selectividad septiembre 2012**. Hallar el punto simétrico de $P(2,1,-5)$ respecto de la recta r definida por

$$r \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

Solución: $P'(-6,-1,1)$