8 LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

Página 221

REFLEXIONA Y RESUELVE

Algunos límites elementales

■ **Utiliza tu sentido común para dar el valor de los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^3$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} x^3$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} x^2$, $\quad \lim\limits_{x \to 2} x^3$, $\quad \lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 3)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2}$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x}$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2+1}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$, $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$, $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2+1}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1}$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 5x^2}{x^2+1}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1}$, $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{3x+5}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$; $\quad \lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$; $\quad \lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 3) = -9$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$; $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$

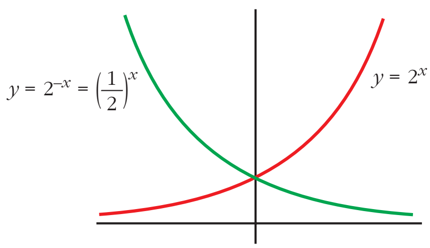
f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2 + 1} = 0$

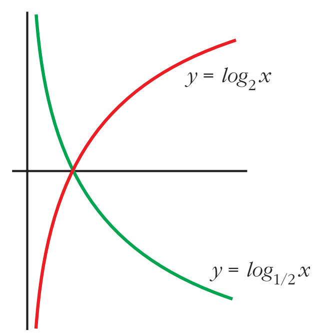
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2 + 1} = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 5x^2}{x^2 + 1} = +\infty$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2 + 1} = -\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{3x + 5} = -\infty$

Exponenciales y logarítmicas

Recuerda cómo son las gráficas de algunas funciones exponenciales y logarítmicas:





■ **A la vista de estas gráficas, asigna valor a los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{-x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_2 x$, $\lim\limits_{x \to 0} \log_2 x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_{1/2} x$, $\lim\limits_{x \to 0} \log_{1/2} x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_{1/2} x$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{-x} = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_2 x$ no existe, $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \log_2 x = -\infty$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_{1/2} x$ no existe, $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \log_{1/2} x = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \log_{1/2} x = -\infty$

Con calculadora

Tanteando con la calculadora, da el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (x - 3) \cdot \ln (x - 3)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen} x}{x} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (x - 3) \cdot \ln (x - 3) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x} = e^6 \simeq 403{,}43$

Página 222

1. **Asigna límite (finito o infinito) a las siguientes sucesiones e identifica a las que no tienen límite:**

a) $a_n = n^3 - 10n^2$ **b)** $b_n = 5 - 3n^2$ **c)** $c_n = \dfrac{n+5}{2-n}$ **d)** $d_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

e) $e_n = \text{sen} \dfrac{\pi}{4} n$ **f)** $f_n = 2^n$ **g)** $g_n = -2^n$ **h)** $h_n = (-2)^n$

a) $a_n = n^3 - 10n^2$

$(-9, -32, -63, -96, -125, -144, -147, -128, -81, 0, 121, \ldots)$ $a_n \to +\infty$

b) $b_n = 5 - 3n^2$ $(2, -7, -22, -43, -70, -103, -142, -187, -283, \ldots)$ $b_n \to -\infty$

c) $c_n = \dfrac{n+5}{2-n}$ $\left(6, \ldots, -8, -\dfrac{9}{2}, -\dfrac{10}{3}, -\dfrac{11}{4}, -\dfrac{12}{5}, -\dfrac{13}{6}, -\dfrac{14}{7}, \ldots\right)$ $c_n \to -1$

d) $d_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{9}{4}, \dfrac{16}{5}, \dfrac{25}{6}, \dfrac{36}{7}, \dfrac{49}{8}, \dfrac{64}{9}, \dfrac{81}{10}, \dfrac{100}{11}, \ldots\right)$ $d_n \to +\infty$

e) $e_n = \text{sen} \dfrac{\pi}{4} n$ $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \ldots\right)$ e_n no tiene límite

f) $f_n = 2^n$ $(2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots)$ $f_n \to +\infty$

g) $g_n = -2^n$ $(-2, -4, -8, -16, -32, -64, -128, -256, \ldots)$ $g_n \to -\infty$

h) $h_n = (-2)^n$ $(-2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256, \ldots)$ h_n no tiene límite

Página 225

1. Si $u(x) \to 2$ y $v(x) \to -3$ cuando $x \to +\infty$, calcula el límite cuando $x \to +\infty$ de:

a) $u(x) + v(x)$ **b)** $v(x)/u(x)$

c) $5^{u(x)}$ **d)** $\sqrt{v(x)}$

e) $u(x) \cdot v(x)$ **f)** $\sqrt[3]{u(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) + v(x)] = 2 + (-3) = -1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{v(x)}{u(x)} = \dfrac{-3}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5^{u(x)} = 5^2 = 25$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{v(x)}$ no existe

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) \cdot v(x)] = 2 \cdot (-3) = -6$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{2}$

2. Si $u(x) \to -1$ y $v(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$, calcula el límite cuando $x \to +\infty$ de:

a) $u(x) - v(x)$ **b)** $v(x) - u(x)$

c) $v(x)/u(x)$ **d)** $\log_2 v(x)$

e) $u(x) \cdot v(x)$ **f)** $\sqrt[3]{u(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) - v(x)] = -1 - 0 = -1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [v(x) - u(x)] = 0 - (-1) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{v(x)}{u(x)} = \dfrac{0}{-1} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 v(x) = \begin{cases} -\infty \text{ si } v(x) \to 0^+ \\ \text{no existe si } v(x) \to 0^- \end{cases}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) \cdot v(x)] = -1 \cdot 0 = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{-1} = -1$

Página 226

3. Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 3x - x^3)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (-5 \cdot 2^{2x})$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 3x - x^3) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-5 \cdot 2^{2x}) = -\infty$

4. **Calcula estos límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 + 2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2\log_{10} x)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 + 2} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2\log_{10} x) = -\infty$

Página 227

5. **Indica cuáles de las siguientes expresiones son infinitos (±∞) cuando $x \to +\infty$:**

a) $3x^5 - \sqrt{x} + 1$ **b)** $0{,}5^x$ **c)** $-1{,}5^x$

d) $\log_2 x$ **e)** $1/(x^3 + 1)$ **f)** $\sqrt{x}$

g) 4^x **h)** 4^{-x} **i)** -4^x

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^5 - \sqrt{x} + 1) = +\infty \ \to$ Sí

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 0{,}5^x = 0 \ \to$ No

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-1{,}5^x) = -\infty \ \to$ Sí

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x = +\infty \ \to$ Sí

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3 + 1} = 0 \ \to$ No

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \ \to$ Sí

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^x = +\infty \ \to$ Sí

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^{-x} = 0 \ \to$ No

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} -4^x = -\infty \ \to$ Sí

6. **a) Ordena de menor a mayor los órdenes de los siguientes infinitos:**

$$\log_2 x \quad \sqrt{x} \quad x^2 \quad 3x^5 \quad 1{,}5^x \quad 4^x$$

b) Teniendo en cuenta el resultado anterior, calcula:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1{,}5^x}$$

a) $\log_2 x \quad \sqrt{x} \quad x^2 \quad 3x^5 \quad 1{,}5^x \quad 4^x$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log_2 x}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^5}{x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{1{,}5^x} = 0$

Página 228

7. **Si, cuando $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 4$, $h(x) \to -\infty$, $u(x) \to 0$, asigna, siempre que puedas, límite cuando $x \to +\infty$ a las expresiones siguientes:**

a) $f(x) - h(x)$ **b)** $f(x)^{f(x)}$ **c)** $f(x) + h(x)$

d) $f(x)^{x}$ **e)** $f(x) \cdot h(x)$ **f)** $u(x)^{u(x)}$

g) $f(x)/h(x)$ **h)** $[-h(x)]^{h(x)}$ **i)** $g(x)^{h(x)}$

j) $u(x)/h(x)$ **k)** $f(x)/u(x)$ **l)** $h(x)/u(x)$

m) $g(x)/u(x)$ **n)** $x + f(x)$ **ñ)** $f(x)^{h(x)}$

o) $x + h(x)$ **p)** $h(x)^{h(x)}$ **q)** x^{-x}

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - h(x)\big) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{f(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) + h(x)\big) = (+\infty) + (-\infty) \;\to$ Indeterminado

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{x} = +\infty^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) \cdot h(x)\big) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{u(x)} = (0)^{(0)} \;\to$ Indeterminado

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{(+\infty)}{(-\infty)} \;\to$ Indeterminado

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} [-h(x)]^{h(x)} = [+\infty]^{-\infty} = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)^{h(x)} = 4^{-\infty} = 0$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{u(x)}{h(x)} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{u(x)} = \dfrac{+\infty}{(0)} = \pm\infty$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{u(x)} = \dfrac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{u(x)} = \dfrac{4}{(0)} = \pm\infty$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x + f(x)\big) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

ñ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x + h(x)\big) = (+\infty) + (-\infty) \quad \to \quad$ Indeterminado

p) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)^{h(x)} = (-\infty)^{-\infty} \quad \to \quad$ No existe

q) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-x} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

Página 229

8. Las funciones f, g, h y u son las del ejercicio propuesto 7 (página anterior). Di cuáles de las siguientes funciones son indeterminaciones. En cada caso, si es indeterminación, di de qué tipo, y, si no lo es, di cuál es el límite:

a) $f(x) + h(x)$ **b)** $f(x)/h(x)$

c) $f(x)^{-h(x)}$ **d)** $f(x)^{h(x)}$

e) $f(x)^{u(x)}$ **f)** $u(x)^{h(x)}$

g) $[g(x)/4]^{f(x)}$ **h)** $g(x)^{f(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) + h(x)\big) = (+\infty) + (-\infty)$. Indeterminado.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{(+\infty)}{(-\infty)}$. Indeterminado.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{-h(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{u(x)} = (+\infty)^{(0)}$. Indeterminado.

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{h(x)} = 0^{-\infty} = \pm\infty$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{g(x)}{4}\right]^{f(x)} = (1)^{(+\infty)}$. Indeterminado.

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)^{f(x)} = 4^{+\infty} = +\infty$

Página 231

1. Sin operar, di el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $(x^2 - \sqrt[3]{2x+1}\,)$ **b)** $(x^2 - 2^x)$

c) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}$ **d)** $3^x - 2^x$

e) $5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}$ **f)** $\sqrt{x} - \log_5 x^4$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt[3]{2x+1}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2^x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3^x - 2^x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}\right) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \log_5 x^4\right) = +\infty$

2. Calcula el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}$ **b)** $\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}$ **c)** $\dfrac{3x+5}{2} - \dfrac{x^2-2}{x}$

d) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$ **e)** $2x - \sqrt{x^2+x}$ **f)** $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x^3+5)(x-2)-(4x^3-x)(x+2)}{(x+2)(x-2)} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4-6x^3+5x-10-4x^4-8x^3+x^2+2x}{x^2-4} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4-14x^3+x^2+7x-10}{x^2-4} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - x(2x^2+1)}{2(2x^2+1)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3-2x^3-x}{4x^2+2} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{4x^2+2} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+5}{2} - \dfrac{x^2-2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+5x-2x^2+4}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5x+4}{2x} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+x-x^2-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{x^2+x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(2x-\sqrt{x^2+x}\right)\left(2x+\sqrt{x^2+x}\right)}{2x+\sqrt{x^2+x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2-x^2-x}{2x+\sqrt{x^2+x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2-x}{2x+\sqrt{x^2+x}} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1-x-2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = 0$

Página 232

3. **Halla los siguientes límites cuando $x \to +\infty$:**

a) $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^x$ **b)** $\left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}$ **c)** $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^5$

d) $\left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$ **e)** $\left(5 + \frac{5}{x}\right)^{5x}$ **f)** $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{1/5} = e^{1/5}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{5x} = 5^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^5 = 1^5 = 1$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x/5}\right)^{x/5}\right]^5 = e^5$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 + \frac{5}{x}\right)^{5x} = 5^{+\infty} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-5} = e^{-5}$

4. **Calcula estos límites cuando $x \to +\infty$:**

a) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x-2}$ **b)** $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{4x}$ **c)** $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x}$

d) $\left(1 + \frac{3}{2x}\right)^5$ **e)** $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3x}$ **f)** $\left(1 + \frac{2}{5x}\right)^{5x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x-2} = e^3$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{4x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{-2} = e^{-2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{3/5} = e^{3/5}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^5 = 1^5 = 1$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{-3/2} = e^{-3/2}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{5x}\right)^{5x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x/2}\right)^{5x/2}\right]^2 = e^2$

Página 233

5. **Resuelve, aplicando la regla anterior:**

a) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{5x-3}$

b) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3-3x+2}{x^3+x^2}\right)^{2x-4}$

a) Sea $\displaystyle l = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{5x-3}$

Como $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{3x+5}{3x-1} = 1$ y $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} (5x-3) = +\infty$, l es del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la regla:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1} - 1\right) \cdot (5x-3)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{6}{3x-1}\right) \cdot (5x-3)} = e^{10}$$

b) Sea $\displaystyle l = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3-3x+2}{x^3+x^2}\right)^{2x-4}$

Como $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-3x+2}{x^3+x^2} = 1$ y $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} (2x-4) = +\infty$, l es del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la regla:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3-3x^2+2}{x^2+2} - 1\right) \cdot (2x-4)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-x^2-3x+2}{x^3+x^2}\right) \cdot (2x-4)} = e^{-2}$$

Página 235

1. **Sin operar, di el límite cuando $x \to -\infty$ de las siguientes expresiones:**

a) $x^2 - \sqrt[3]{2x+1}$

b) $x^2 + 2^x$

c) $x^2 - 2^x$

d) $x^2 - 2^{-x}$

e) $2^{-x} - 3^{-x}$

f) $\sqrt{x^5 - 1} - 5^x$

g) $2^x - x^2$

h) $x^2 - \sqrt{x^4 - 1}$

i) $\sqrt[3]{x+2} - x^2$

j) $3^{-x} - 2^{-x}$

a) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \left(x^2 - \sqrt[3]{2x+1}\right) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} (x^2 + 2^x) = +\infty$

c) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} (x^2 - 2^x) = +\infty$

d) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} (x^2 - 2^{-x}) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2^{-x} - 3^{-x}) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^5 - 1} - 5^x\right)$ no existe

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2^x - x^2) = -\infty$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^5 - \sqrt{x^4 - 1}\right) = -\infty$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{x + 2} - x^2\right) = -\infty$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3^{-x} - 2^{-x}) = +\infty$

2. Calcula el límite cuando $x \to -\infty$ de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}$

b) $\dfrac{x^3}{2x^2 + 1} - \dfrac{x}{2}$

c) $\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}$

d) $2x + \sqrt{x^2 + x}$

e) $\sqrt{x^2 + 2x} + x$

f) $\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

g) $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{5x + 3}$

h) $\left(\dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2}\right)^{3x - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-3x^3 + 5}{-x + 2} - \dfrac{-4x^3 - x}{-x - 2}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 5x + 6x^3 - 10 - 4x^4 + x^2 + 8x^3 - 2x}{x^2 - 4} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4 + 14x^3 + x^2 - 7x - 10}{x^2 - 4} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2 + 1} - \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-x^3}{2x^2 + 1} + \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^3 + 2x^3 + x}{4x^2 + 2} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{4x^2 + 2} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 1}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 2}\right)\left(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{-1}{1 + 1} = -\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x + \sqrt{x^2 + x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-2x + \sqrt{x^2 - x}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(-2x + \sqrt{x^2 - x}\right)\left(-2x - \sqrt{x^2 - x}\right)}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - x^2 + x}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + x}{-2x - \sqrt{x^2 - x}} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} + x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \dfrac{-2}{1 + 1} = \dfrac{-2}{2} = -1$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{-x}\right)^{-2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{-x/3}\right)^{-x/3}\right]^6 = e^6$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{5x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-5x + 3} = e^{-5}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2}\right)^{3x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2}\right)^{-3x - 1} =$

$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2} - 1\right) \cdot (-3x - 1)\right]} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-x - 3}{-x^2 + 2} \cdot (-3x - 1)\right)} =$

$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{x^2 + 2}} = e^3$

Página 238

1. Si $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$, di el valor del límite cuando x tiende a 1 de las siguientes funciones:

a) $f(x) + g(x)$ **b)** $f(x) \cdot g(x)$ **c)** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

d) $f(x)^{g(x)}$ **e)** $\sqrt{g(x)}$ **f)** $4f(x) - 5g(x)$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(f(x) + g(x)\right) = 3 + 2 = 5$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = 3 \cdot 2 = 6$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)^{g(x)} = 3^2 = 9$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{g(x)} = \sqrt{2}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \left(4f(x) - 5g(x)\right) = 12 - 10 = 2$

2. **Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$, entonces $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m$.**

Enuncia las restantes propiedades de los límites de las operaciones con funciones empleando la notación adecuada.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$, entonces:

1) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m$

2) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = l - m$

3) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$

4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$ (Si $m \neq 0$).

5) Si $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x)^{g(x)} \right] = l^m$

6) Si n es impar, o si n es par y $f(x) \geq 0$ $\to$ $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

7) Si $\alpha > 0$ y $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to a} [log_\alpha \ f(x)] = log_\alpha \ l$

3. **Si $\lim\limits_{x \to 2} p(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} q(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} r(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 2} s(x) = 0$, di, en los casos en que sea posible, el valor del $\lim\limits_{x \to 2}$ de las siguientes funciones:**

[Recuerda que las expresiones $(+\infty)/(+\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(0) \cdot (+\infty)$, $(1)^{(+\infty)}$, $(0)/(0)$ son indeterminaciones].

a) $2p(x) + q(x)$ **b)** $p(x) - 3q(x)$ **c)** $\dfrac{r(x)}{p(x)}$ **d)** $\dfrac{p(x)}{p(x)}$

e) $\dfrac{s(x)}{q(x)}$ **f)** $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ **g)** $s(x) \cdot p(x)$ **h)** $s(x)^{s(x)}$

i) $p(x)^{r(x)}$ **j)** $r(x)^{s(x)}$ **k)** $\dfrac{3 - r(x)}{s(x)}$ **l)** $\left[\dfrac{r(x)}{3}\right]^{s(x)}$

m) $r(x)^{p(x)}$ **n)** $r(x)^{-q(x)}$ **ñ)** $\left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{p(x)}$ **o)** $\left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{-p(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} [2p(x) + q(x)] = +\infty + (+\infty) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 3q(x)] = (+\infty) - (+\infty)$. Indeterminado.

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{r(x)}{p(x)} = \dfrac{3}{+\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{p(x)}{p(x)} = \lim\limits_{x \to 2} 1 = 1$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{q(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{(+\infty)}{(+\infty)}$. Indeterminado.

g) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot p(x)] = (0) \cdot (+\infty)$. Indeterminado.

h) $\lim\limits_{x \to 2} s(x)^{s(x)} = (0)^{(0)}$. Indeterminado.

i) $\lim\limits_{x \to 2} p(x)^{r(x)} = +\infty^3 = +\infty$

j) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{s(x)} = 3^0 = 1$

k) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3 - r(x)}{s(x)} = \dfrac{3 - 3}{(0)} = \dfrac{(0)}{(0)}$. Indeterminado.

l) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{s(x)} = 1^0 = 1$

m) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{p(x)} = 3^{+\infty} = +\infty$

n) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{-q(x)} = 3^{-\infty} = 0$

ñ) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{p(x)} = (1)^{(+\infty)}$. Indeterminado.

o) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{-p(x)} = (1)^{(-\infty)}$. Indeterminado.

Página 239

4. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x + 1)(x^2 - 3x + 5)}{(x + 1)(x - 7)} =$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x - 7} = \dfrac{9}{-8} = \dfrac{-9}{8}$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \dfrac{45}{84} = \dfrac{15}{28}$

5. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}} = \lim\limits_{x \to -3} \sqrt[6]{\dfrac{(x-1)^3 (x+3)^3}{x^4 (x+3)^2}} = \lim\limits_{x \to -3} \sqrt[6]{\dfrac{(x-1)^3 (x+3)}{x^4}} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}} = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt[4]{\dfrac{x(x-1)(x+1)}{(x+2)^2 (x-1)^2}} = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt[4]{\dfrac{x(x+1)}{(x+2)^2 (x-1)}} \to$

$\to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \text{ no existe} \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

Página 240

6. Calcula: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right)$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x(x+2)} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x(x^2+1)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x^2+1)(x^2 - 5x + 2) - (x+2)(x^3 + 2x + 1)}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x^2 - 5x + 2 - x^4 - 2x^2 - x - 2x^3 - 4x - 2}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-7x^3 + x^2 - 10x}{x(x+2)(x^2+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(-7x^2 + x - 10)}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-7x^2 + x - 10}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{-10}{2 \cdot 1} = -5$$

7. Calcula: $\lim\limits_{x \to 7} \left(\dfrac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} \right)^{\frac{x+1}{x-7}}$

$$\lim_{x \to 7} \left(\frac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} \right)^{\frac{x+1}{x-7}} = e^{\lim\limits_{x \to 7} \left[\left(\frac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} - 1 \right) \cdot \frac{x+1}{x-7} \right]} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 7} \left(\frac{x^2 - 8x + 7}{x - 3} \cdot \frac{x+1}{x-7} \right)} = e^{\lim\limits_{x \to 7} \frac{(x-7)(x-1)(x+1)}{(x-3)(x-7)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 7} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)}} = e^{12}$$

Página 243

1. Encuentra cuatro intervalos distintos en cada uno de los cuales tenga una raíz la ecuación siguiente:

$$2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0$$

Busca los intervalos entre –4 y 3. Comprueba que $f(1,5) < 0$ y tenlo en cuenta.

Consideramos la función $f(x) = 2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$.

Tenemos que $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y que:

$$\left.\begin{array}{l} f(-4) = 231 > 0 \\ f(-3) = -7 < 0 \end{array}\right\} \text{Hay una raíz en } (-4, -3).$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \end{array}\right\} \text{Hay una raíz en } (0, 1).$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 > 0 \\ f(1,5) = -1,375 < 0 \end{array}\right\} \text{Hay una raíz en } (1;\ 1,5).$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,5) = -1,375 < 0 \\ f(2) = 3 > 0 \end{array}\right\} \text{Hay una raíz en } (1,5;\ 2).$$

2. Comprueba que las funciones $e^x + e^{-x} - 1$ y $e^x - e^{-x}$ se cortan en algún punto.

Consideramos la función diferencia:

$$F(x) = e^x + e^{-x} - 1 - (e^x - e^{-x}) = e^x + e^{-x} - 1 - e^x + e^{-x} = 2e^{-x} - 1$$

$F(x)$ es una función continua. Además:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 > 0 \\ f(1) = -0,26 < 0 \end{array}\right\} \textit{signo de } F(0) \neq \textit{signo de } F(1).$$

Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0,1)$ tal que $F(c) = 0$; es decir, existe $c \in (0, 1)$ tal que las dos funciones se cortan en ese punto.

3. Justifica cuáles de las siguientes funciones tienen máximo y mínimo absoluto en el intervalo correspondiente:

a) $x^2 - 1$ en $[-1, 1]$

b) x^2 en $[-3, 4]$

c) $1/(x - 1)$ en $[2, 5]$

d) $1/(x - 1)$ en $[0, 2]$

e) $1/(1 + x^2)$ en $[-5, 10]$

a) $f(x) = x^2 - 1$ es continua en $[-1, 1]$. Por el teorema de Weierstrass, podemos asegurar que tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

b) $f(x) = x^2$ es continua en $[-3, 4]$. Por tanto, también tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ es continua en $[2, 5]$. Por tanto, tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ no es continua en $[0, 2]$, pues es discontinua en $x = 1$. No podemos asegurar que tenga máximo y mínimo absolutos en ese intervalo. De hecho, no tiene ni máximo ni mínimo absolutos, puesto que:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ es continua en $[-5, 10]$. Por tanto, tiene máximo y mínimo absolutos en ese intervalo.

Página 249

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Límites cuando $x \to \pm\infty$

1 **Sabiendo que** $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = -\infty$ **y** $\lim c_n = 3$, **di en cuáles de los siguientes casos hay indeterminación.**

En los casos en que no la haya, di cuál es el límite:

a) $a_n + b_n$ **b)** $b_n + c_n$ **c)** $\dfrac{a_n}{c_n}$ **d)** $\dfrac{a_n}{b_n}$

e) $(c_n)^{b_n}$ **f)** $(3 - c_n) \cdot a_n$ **g)** $\dfrac{b_n}{3 - c_n}$ **h)** $\left(\dfrac{3}{c_n}\right)^{b_n}$

a) $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = +\infty + (-\infty) = (+\infty) - (+\infty) \;\to$ Indeterminación.

b) $\lim (b_n + c_n) = \lim b_n + \lim c_n = -\infty + 3 = -\infty$

c) $\lim \dfrac{a_n}{c_n} = \dfrac{+\infty}{3} = +\infty$

d) $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{(+\infty)}{(-\infty)} \;\to$ Indeterminación.

e) $\lim [c_n]^{b_n} = 3^{-\infty} = \dfrac{1}{3^{+\infty}} = 0$

f) $\lim [3 - c_n] \cdot a_n = (0) \cdot (+\infty) \;\to$ Indeterminación.

g) $\lim \dfrac{b_n}{3 - c_n} = \dfrac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$ (puede ser $+\infty$ o $-\infty$).

h) $\lim \left[\dfrac{3}{c_n}\right]^{b_n} = (1)^{(-\infty)} \;\to$ Indeterminación.

2 **Calcula los límites cuando** $x \to -\infty$ **de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{2x + 5}{2 - x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{10x - 5}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{3x^2 + x - 4}{2x + 3}$ **d)** $i(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 3}{7 + 5x^3}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 5}{2 - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x + 5}{2 + x} = -2$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{10x - 5}{x^2 + 1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 + x - 4}{2x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - x - 4}{-2x + 3} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 2x - 3}{7 + 5x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3 - 2x - 3}{7 - 5x^3} = \dfrac{1}{5}$

3 **Calcula los límites de las sucesiones siguientes:**

a) $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2 + 6n}}{2n + 1}$ **b)** $\lim \sqrt{\dfrac{5n^2 - 7}{n + 1}}$

c) $\lim \dfrac{1 + \sqrt{n}}{2n - 3}$ **d)** $\lim \dfrac{3n}{\sqrt{n^3 + 2}}$

a) $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2 + 6n}}{2n + 1} = \lim \dfrac{\sqrt{3}\, n}{2n} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\lim \sqrt{\dfrac{5n^2 - 7}{n + 1}} = +\infty$

c) $\lim \dfrac{1 + \sqrt{n}}{2n - 3} = 0$ d) $\lim \dfrac{3n}{\sqrt{n^3 + 2}} = 0$

4 **Calcula estos límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{e^x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7}\right)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 0$

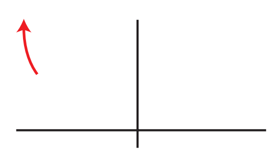
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{e^x} = 0$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7}\right) = +\infty$

5 **Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x + 1}$

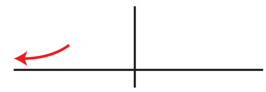
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1 - 3x}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (0{,}5^{-x} + 1) = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x+1} = 0$

Sabemos que $2^{x+1} > 0$ para cualquier x.



c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-x} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

Comprobamos que $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{x} > \dfrac{1}{e}$ dando a x algún valor. Por ejemplo, $x = -10$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1-3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^{1+3x} =$

$$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} - 1\right) \cdot (1+3x)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-2-6x}{x}\right)} = e^{-6} = \frac{1}{e^{6}}$$

Comprobamos que $\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{1-3x} < e^{-6}$ dando a x algún valor. Por ejemplo, $x = -10$.

6 **Halla:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}\right) = (\infty) - (\infty)$ (Indeterminación).

La resolvemos multiplicando y dividiendo por $\left(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}\right)$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4}\right)\left(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}\right)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2 + 2x) - (x^2 - 4)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x + 4}{\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - 4}} = \frac{-2}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) = (\infty) - (\infty)$ (Indeterminación).

La resolvemos multiplicando y dividiendo por $\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

7 **Calcula el límite de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$:**

a) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x - 1)^2}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x + \log x}{\log x}$

c) $h(x) = \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x + 1}}$ **d)** $i(x) = \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x - 1)^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 4x + 1} = \dfrac{5}{4}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \log x}{\log x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{\log x} + 1\right) = +\infty + 1 = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x + 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}\,\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1} = 3$

8 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x + 1} - \dfrac{3x}{2}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 + 2x}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x + 1}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x + 4}{2x + 5}\right)^{x - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x + 1} - \dfrac{3x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 - 10x - 3x(x + 1)}{2(x + 1)}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 10x - 3x^2 - 3x}{2x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2 - 13x}{2x + 2} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 + 2x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(x^2 - \sqrt{x^4 + 2x}\right)\left(x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}\right)}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - (x^4 + 2x)}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - x^4 - 2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{x^2 + \sqrt{x^4 + 2x}} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x + 1}\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x + 4}{2x + 5}\right)^{x - 1} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$

9 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$ b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$ c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x-4}{3x-2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ e) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{3x-2}$ f) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{x^2-5}$

a) Sea $\displaystyle l = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

Como $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$ y $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} - 1\right) \cdot x^2} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2-1}} = e^2$$

b) Sea $\displaystyle l = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$

Como $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$ y $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (2x-1) = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2} - 1\right) \cdot (2x-1)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6x-3}{x-2}} = e^6$$

c) Sea $\displaystyle l = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

Como $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+3} = 1$ y $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x+2) = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3} - 1\right) \cdot (x+2)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4(x+2)}{x+3}} = e^{-4}$$

d) Sea $\displaystyle l = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x-4}{3x-2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

Como $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-4}{3x-2} = 1$ y $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{3} = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x-4}{3x-2} - 1\right) \cdot \frac{x+1}{3}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{3x-2} \cdot \frac{x+1}{3}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x-2}{9x-6}} = e^{-2/9}$$

e) Sea $l = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^{3x-2}$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x - 2) = -\infty$, se trata de un límite del tipo $\dfrac{1}{(1)^{(+\infty)}}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = \frac{1}{e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} - 1\right) \cdot (3x-2)}} = \frac{1}{e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{-1}{x^2}\right) \cdot (3x-2)}} = \frac{1}{e^0} = 1$$

f) Sea $l = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{x^2-5}$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-3}{x+2} = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 5) = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x-3}{x+2} - 1\right) \cdot (x^2-5)} = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-5(x^2-5)}{x+2}} = +\infty$$

10 Halla $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ en los siguientes casos:

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 - \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x} & \text{si } x \ne 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

b) • $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x^2}{x} = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-x^2}{x} = +\infty$

Página 250

Límites en un punto

11 **Sabiendo que:**

$$\lim_{x \to 2} p(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 2} q(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 2} r(x) = 3 \qquad \lim_{x \to 2} s(x) = 0$$

di, en los casos en que sea posible, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 2} \frac{s(x)}{p(x)}$ **b)** $\lim_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)}$

c) $\lim_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)]$ **d)** $\lim_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)]$

a) $\lim_{x \to 2} \frac{s(x)}{p(x)} = \frac{0}{+\infty} = 0$

b) $\lim_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)} = 0^{+\infty} = 0$

c) $\lim_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)] = (0) \cdot (-\infty) \;\; \to$ Indeterminado.

d) $\lim_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)] = +\infty - 2\,(-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

12 **Calcula:**

a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2+3}{x^3} - \frac{1}{x} \right)$ **b)** $\lim_{x \to 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} \right]$

a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2+3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2+3-x^2}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{x^3} = \frac{3}{(0)}.$

Hallamos los límites laterales:

$\lim_{x \to 0^-} \frac{3}{x^3} = -\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{3}{x^3} = +\infty.$ No tiene límite.

b) $\lim_{x \to 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} \right] = \lim_{x \to 1} \frac{2x-(x-1)}{x(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{2x-x+1}{x(x-1)^2} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{2}{0}$$

Hallamos los límites laterales:

$\lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty; \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty.$

Así, $\lim_{x \to 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} \right] = +\infty.$

13 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{1 - x}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^3}{1 - x^2}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^2 - x - 2}$

d) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$

a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{1 - x} = \frac{(0)}{(0)}$ Indeterminación.

Dividimos numerador y denominador por $x - 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{1 - x} \overset{(*)}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(x-6)(x-1)}{-(x-1)} = \lim_{x \to 1} (6 - x) = 5$$

(*) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & -6 \\ \hline & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^3}{1 - x^2} = \frac{(0)}{(0)}$ Indeterminación.

Simplificamos la fracción:

$$\frac{(x-1)^3}{1-x^2} = \frac{(x-1)(x-1)(x-1)}{(1-x)(1+x)} = \frac{(x-1)(x-1)(x-1)}{-(x-1)(1+x)} = \frac{(x-1)^2}{-(1+x)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{-(1+x)} = \frac{0}{-2} = 0$$

c) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{(0)}{(0)}$ Indeterminación.

Dividimos numerador y denominador por $x + 1$:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)(x + 1)}{(x - 2)(x + 1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 2} = 0$$

d) $$\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h + 2x)}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2x) = 2x$$

14 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{3}{x^2 - 5x + 6} - \dfrac{4}{x - 2}\right]$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1 - \sqrt{3 - x}}{x - 2}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x + 9} - 3}{x^2}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{3x}\right]$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{3}{x^2 - 5x + 6} - \dfrac{4}{x - 2}\right] = \lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{3}{(x - 2)(x - 3)} - \dfrac{4}{(x - 2)}\right] =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3 - 4(x - 3)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3 - 4x + 12}{(x - 2)(x - 3)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-4x + 15}{(x - 2)(x - 3)} = \dfrac{7}{(0)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-4x + 15}{(x - 2)(x - 3)} = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-4x + 15}{(x - 2)(x - 3)} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - \sqrt{3 - x}}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(1 - \sqrt{3 - x})(1 + \sqrt{3 - x})}{(x - 2)(1 + \sqrt{3 - x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - (3 - x)}{(x - 2)(1 + \sqrt{3 - x})} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - 3 + x}{(x - 2)(1 + \sqrt{3 - x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{(x - 2)(1 + \sqrt{3 - x})} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{1 + \sqrt{3 - x}} = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 9} - 3}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{x + 9} - 3)(\sqrt{x + 9} + 3)}{x^2(\sqrt{x + 9} + 3)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 9 - 9}{x^2(\sqrt{x + 9} + 3)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2(\sqrt{x + 9} + 3)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x(\sqrt{x + 9} + 3)} = \dfrac{1}{(0)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x(\sqrt{x + 9} + 3)} = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x(\sqrt{x + 9} + 3)} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{3x}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x})(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})}{3x(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x) - (1 - x)}{3x(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + x - 1 + x}{3x(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{3x(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{3(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})} = \dfrac{2}{3 \cdot 2} = \dfrac{1}{3}$

15 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2x^2-x-1}{7-x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

a) Sea $l = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Como $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+1}{2x+1} = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^2+1}{2x+1} - 1\right) \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2-2x}{2x+1} \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2-2x}{2x^2+x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{x(x-2)}{x(2x+1)}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{x-2}{2x+1}} = e^{-2}$$

b) Sea $l = \lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2x^2-x-1}{7-x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

Como $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2-x-1}{7-x} = 1$ y $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$, se trata de un límite del tipo $(1)^{(+\infty)}$.

Aplicando la fórmula:

$$l = e^{\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{2x^2-x-1}{7-x} - 1\right) \cdot \frac{1}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2-8}{7-x} \cdot \frac{1}{x-2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{2(x+2)(x-2)}{(7-x)(x-2)}} = e^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x+4}{7-x}} = e^{8/5}$$

Continuidad

16 **Averigua si estas funciones son continuas en $x = 2$:**

a) $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x < 2 \\ 6-x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \le 2 \\ 2x+1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x-2) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (6-x) = 4 \\ f(2) = 6-2 = 4 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 2$, puesto que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2-1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x+1) = 5 \end{array}\right\}$ $f(x)$ no es continua en $x = 2$, puesto que no existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

s17 **Estudia la continuidad de estas funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) • En $x \neq 1 \to f(x)$ es continua; puesto que e^x y $\ln x$ son continuas para $x < 1$ y $x \geq 1$, respectivamente.

• En $x = 1$: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} e^x = e \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (\ln x) = 0$

No es continua en $x = 1$, pues no existe $\lim_{x \to 1} f(x)$.

b) El dominio de la función es $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

• Si $x \neq 0$ y $x \neq 1 \to$ La función es continua.

• En $x = 0$ es discontinua, puesto que $f(x)$ no está definida para $x = 0$.

Además, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Hay una asíntota vertical en $x = 0$.

• En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x} = 1 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x - 1) = 1 \\ f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ es continua en } x = 1, \text{ pues } \lim_{x \to 1} f(x) = f(1).$$

18 **Halla los puntos de discontinuidad de la función** $y = \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{12}{x^2-9}$ **y di si en alguno de ellos la discontinuidad es evitable.**

$$y = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} = \frac{2(x+3) - 12}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x + 6 - 12}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x-6}{(x-3)(x+3)} = \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

Calculamos los valores que anulan el denominador:

$$(x-3)(x+3) = 0 \; \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

La función es discontinua en $x = 3$ y en $x = -3$, pues no está definida para esos valores.

- En $x = -3$: $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{2}{x+3} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{2}{(x+3)} = +\infty$

  Hay una asíntota vertical en $x = -3$; la discontinuidad no es evitable.

- En $x = 3$: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2}{(x+3)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

  Luego en $x = 3$, la discontinuidad es evitable, porque la función tiene límite en ese punto.

PARA RESOLVER

19 a) Calcula el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to 0$, $x \to 2$, $x \to 3$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$:

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 5x + 6}$$

b) Representa gráficamente los resultados.

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{x-3}{(x-3)(x-2)}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{-3}{6} = \dfrac{-1}{2}$

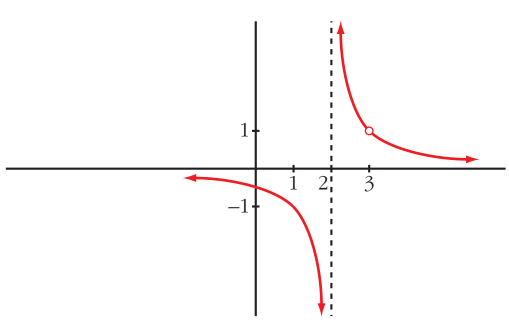
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{(0)}$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x-2} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b)



s20 **Calcula el valor que debe tener k para que las siguientes funciones sean continuas:**

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \le 2 \\ k - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + k & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} e^{kx} & \text{si } x \le 0 \\ x + 2k & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • Si $x \neq 2$, la función es continua.

• En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x + 1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (k - x) = k - 2 \\ f(2) = 2 + 1 = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ k - 2 = 3 \rightarrow k = 5 \end{array}$$

b) • Si $x \neq 0$, la función es continua.

• En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + k) = k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 1) = -1 \\ f(0) = 0 + k = k \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ k = -1 \end{array}$$

c) • Si $x \neq 0$, la función es continua.

• En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{kx} = e^0 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x + 2k = 2k \\ f(0) = e^{k \cdot 0} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ 1 = 2k \rightarrow k = 1/2 \end{array}$$

Página 251

s21 **Calcula el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) • Si $x \neq 1$, la función es continua, porque lo es $\dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$.

Para que sea continua en $x = 1$, debe verificarse que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Calculamos $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^3 + x^2 + x + 1) = 4$$

$f(1) = k$

(*) Indeterminación del tipo $\dfrac{(0)}{(0)}$. Simplificamos la fracción.

Para que sea continua en $x = 1$, ha de ser $k = 4$. Para este valor, f es continua en $\mathbb{R}$.

b) • Si $x \geq 0$ y $x \neq 1$, la función es continua, porque lo es $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.

Para que sea continua en $x = 1$, debe verificarse que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Calculamos $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{(0)}{(0)} \quad \text{(Indeterminación).}$$

La resolvemos multiplicando y dividiendo por $\left(\sqrt{x} + 1\right)$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)}{(x - 1)\left(\sqrt{x} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)\left(\sqrt{x} + 1\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\left(\sqrt{x} + 1\right)} = \frac{1}{2}$$

$f(1) = k$

Para que sea continua en $x = 1$, ha de ser $k = \dfrac{1}{2}$. Para este valor, f es continua en $[0, +\infty)$.

22 Estudia la continuidad de esta función: $f(x) = \begin{cases} |x + 2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Si $x \neq -1$ y $x \neq 1$ $\rightarrow$ la función es continua.
- Si $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} |x + 2| = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right\} \text{La función es continua en } x = -1.$$

- Si $x = 1 \rightarrow$ No es continua, pues no está definida en $x = 1$; no existe $f(1)$.

  Además:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x + 1) = 3 \end{array}\right\} \text{La discontinuidad es de salto (finito).}$$

23 **Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra 5 €. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:**

$$C(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \le 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Halla a de modo que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran "muchísimas" unidades?

☛ ***El precio de una unidad es $C(x)/x$.***

a) $\lim\limits_{x \to 10^-} C(x) = \lim\limits_{x \to 10^-} (5x) = 50$

$\lim\limits_{x \to 10^+} C(x) = \lim\limits_{x \to 10^+} \sqrt{ax^2 + 500} = \sqrt{100a + 500}$

$C(10) = 50$

Para que sea continua, ha de ser:

$\sqrt{100a + 500} = 50 \rightarrow 100a + 500 = 2\,500 \rightarrow 100a = 2\,000 \rightarrow a = 20$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{C(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{ax^2 + 500}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} = \sqrt{20} \approx 4,47$ €

s24 **En el laboratorio de Biología de la universidad, han determinado que el tamaño T de los ejemplares de una cierta bacteria (medido en micras) varía con el tiempo t, siguiendo la ley:**

$$T(t) = \begin{cases} \sqrt{t + a} & \text{si } t < 8 \text{ horas} \\ \dfrac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} & \text{si } t > 8 \text{ horas} \end{cases}$$

El parámetro a es una variable biológica cuya interpretación trae de cabeza a los científicos, pero piensan que puede haber un valor para el cual el crecimiento se mantenga continuo en $t = 8$.

a) Decide la cuestión.

b) Investiga cuál llegará a ser el tamaño de una bacteria si se la cultiva indefinidamente.

a) Para que la función sea continua en $t = 8$, debe cumplirse que $\lim\limits_{t \to 8} T(t) = T(8)$.

Calculamos el límite:

$$\lim_{t \to 8^-} T(t) = \lim_{t \to 8^-} \sqrt{t + a} = \sqrt{8 + a}$$

$$\lim_{t \to 8^+} T(t) = \lim_{t \to 8^+} \frac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} = \lim_{t \to 8^+} \frac{\sqrt{3t - 15} - 3}{t - 8} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{\left(\sqrt{3t - 15} - 3\right)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} = \lim_{t \to 8^+} \frac{3t - 15 - 9}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{3t - 24}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} = \lim_{t \to 8^+} \frac{3(t - 8)}{(t - 8)\left(\sqrt{3t - 15} + 3\right)} =$$

$$= \lim_{t \to 8^+} \frac{3}{\sqrt{3t - 15 + 3}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Para que $T(t)$ pueda ser continua, tendría que cumplirse que:

$$\sqrt{8 + a} = \frac{1}{2} \to 8 + a = \frac{1}{4} \to a = \frac{-31}{4}$$

Pero, si $a = \frac{-31}{4}$, quedaría $T(t) = \sqrt{t + \frac{-31}{4}}$ si $t < 8$.

Esto daría lugar a que $T(t)$ no existiera para $t \le \frac{31}{4} = 7{,}75$ horas.

Por tanto, no hay ningún valor de a para el que el crecimiento se mantenga continuo.

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{-3 + \sqrt{3t - 15}}{t - 8} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ micras.

25 **Dada $f(x) = \dfrac{|x|}{x + 1}$, justifica que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x + 1} & \text{si } x \le 0 \\[2mm] \dfrac{x}{x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

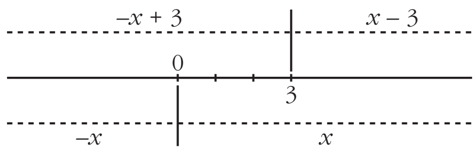
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x + 1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x + 1} = -1$$

26 **Calcula el límite de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, definiéndolas previamente por intervalos:**

a) $f(x) = |x - 3| - |x|$ **b)** $f(x) = |2x - 1| + x$ **c)** $f(x) = \dfrac{x + 1}{|x|}$

a) Definimos f por intervalos:

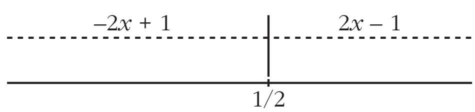


- Si $x < 0$: $|x - 3| - |x| = -(x - 3) - (-x) = -x + 3 + x = 3$
- Si $0 \le x \le 3$: $|x - 3| - |x| = -(x - 3) - x = -2x + 3$
- Si $x > 3$: $|x - 3| - |x| = (x - 3) - x = -3$

Luego: $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \le 0 \\ -2x + 3 & \text{si } 0 < x \le 3 \\ -3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

b)



- Si $x \le \dfrac{1}{2}$: $|2x - 1| + x = -(2x - 1) + x = -2x + 1 + x = -x + 1$
- Si $x > \dfrac{1}{2}$: $|2x - 1| + x = (2x - 1) + x = 3x - 1$

Luego: $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \le \dfrac{1}{2} \\ 3x - 1 & \text{si } x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3x - 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1) = +\infty$

c) • Si $x < 0$: $\dfrac{x + 1}{|x|} = \dfrac{x + 1}{-x}$

• Si $x > 0$: $\dfrac{x + 1}{|x|} = \dfrac{x + 1}{x}$

f no está definida en $x = 0$. Luego: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x+1}{x} = -1$$

27 **Estudia la continuidad en $x = 0$ de la función:**

$$y = 2x + \frac{|x|}{x}$$

¿Qué tipo de discontinuidad tiene?

En $x = 0$, la función no está definida, luego es discontinua. Como:

$y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, entonces:

$$\lim_{x \to 0^-} (2x - 1) = -1; \quad \lim_{x \to 0^+} (2x + 1) = 1$$

Por tanto, hay una discontinuidad de salto (finito) en $x = 0$.

s28 **Se define la función f del modo siguiente:**

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \le 1 \end{cases}$$

Encuentra los valores de a y b para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

- Para que la gráfica de $f(x)$ pase por el origen de coordenadas, ha de ser $f(0) = 0$, es decir: $f(0) = b = 0$
- Para que la función sea continua (para $x \neq 1$, es una función continua), tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x^2 + ax) = 2 + a \\ &\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (\ln x - 1) = -1 \\ &f(1) = 2 + a \end{aligned}\right\}$$

Han de ser iguales, es decir: $2 + a = -1 \;\rightarrow\; a = -3$

Por tanto, si $a = -3$ y $b = 0$, la función es continua; y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

CUESTIONES TEÓRICAS

29 **Si una función no está definida en $x = 3$, ¿puede ocurrir que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$?**

¿Puede ser continua la función en $x = 3$?

Sí, puede ser que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$, por ejemplo:

$f(x) = \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3}$ es tal que $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3} = 5$; y $f(x)$ no está definida en $x = 3$.

Sin embargo, $f(x)$ no puede ser continua en $x = 3$ (pues no existe $f(3)$).

30 **De una función continua, f, sabemos que $f(x) < 0$ si $x < 2$ y $f(x) > 0$ si $x > 2$. ¿Podemos saber el valor de $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$?**

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$

s31 **Sea la función $f(x) = x^2 + 1$.**

¿Podemos asegurar que dicha función toma todos los valores del intervalo [1, 5]? En caso afirmativo, enuncia el teorema que lo justifica.

$f(x)$ es continua en $[0, 2]$ y $f(0) = 1$, $f(2) = 5$.

Por tanto, por el teorema de los valores intermedios, la función toma, en el intervalo [0, 2], todos los valores del intervalo [1, 5].

s32 **Da una interpretación geométrica del teorema de Bolzano y utilízalo para demostrar que las gráficas de $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos x$ se cortan en algún punto.**

☛ ***Mira el ejercicio resuelto 11.***

- Interpretación geométrica: Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado, y en sus extremos toma valores de distinto signo, entonces, con seguridad, corta al eje X en ese intervalo.
- Para las dos funciones dadas, $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos x$, consideramos la función diferencia: $f(x) - g(x) = x^3 + x^2 - 3 - \cos x$

  Como $f(x)$ y $g(x)$ son continuas, también lo es $f(x) - g(x)$.

  Además: $\begin{cases} f(0) - g(0) = -4 & \to \quad f(0) - g(0) < 0 \\ f(2) - g(2) \approx 9{,}42 & \to \quad f(2) - g(2) > 0 \end{cases}$

  Por tanto, existe un número $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) - g(c) = 0$ (aplicando el teorema de Bolzano), es decir, $f(c) = g(c)$.

Página 252

s33 Considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

El segundo miembro de la igualdad carece de sentido cuando $x = 2$. ¿Cómo elegir el valor de $f(2)$ para que la función f sea continua en ese punto?

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

Para que f sea continua en $x = 2$, debemos elegir $f(2) = 4$.

34 De una función g se sabe que es continua en el intervalo cerrado [0, 1] y que para $0 < x \le 1$ es $g(x) = \frac{x^2 + x}{x}$. ¿Cuánto vale $g(0)$?

Si g es continua en $x = 0$, debe verificar que $\lim_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$. Hallamos el límite:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x + 1)}{x} = \lim_{x \to 0^+} (x + 1) = 1$$

Por tanto, $g(0) = 1$.

s35 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 4}{4} & \text{si } 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ e^{-x^2} & \text{si } \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

observamos que f está definida en [0, 1] y que verifica $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e^{-1} > 0$, pero no existe ningún $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. ¿Contradice el teorema de Bolzano? Razona la respuesta.

Según el teorema de Bolzano, si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y *signo de* $f(a) \ne$ *signo de* $f(b)$, entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Veamos si se cumplen las hipótesis. Estudiamos la continuidad en $x = \frac{1}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to (1/2)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (1/2)^-} \dfrac{x - 4}{4} = \dfrac{-7}{8} \\ \lim\limits_{x \to (1/2)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (1/2)^+} e^{-x^2} = e^{-1/4} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Como } \lim\limits_{x \to (1/2)^-} f(x) \ne \lim\limits_{x \to (1/2)^+} f(x), \\ \text{no existe } \lim\limits_{x \to 1/2} f(x). \end{array}$$

$f(x)$ no es continua en $x = \frac{1}{2}$.

Por tanto, f no es continua en el intervalo [0, 1]; luego no cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en dicho intervalo.

s36 **Se sabe que $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y que $f(a) = 3$ y $f(b) = 5$. ¿Es posible asegurar que para algún c del intervalo $[a, b]$ cumple que $f(c) = 7$? Razona la respuesta y pon ejemplos.**

No lo podemos asegurar. Por ejemplo:

$f(x) = x + 3$ cumple que $f(0) = 3$ y $f(2) = 5$. Sin embargo, no existe $c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = 7$, ya que: $f(c) = c + 3 = 7 \;\rightarrow\; c = 4 \;\rightarrow\; c \notin [0, 2]$.

s37 **Halla razonadamente dos funciones que no sean continuas en un punto x_0 de su dominio y tales que la función suma sea continua en dicho punto.**

Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad \text{no es continua en } x = 2;$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad \text{no es continua en } x = 2;$$

pero la función suma, $f(x) + g(x) = 3x$, sí es continua en $x = 2$.

s38 **¿Tiene alguna raíz real la siguiente ecuación?:**

$$\textit{sen}\ x + 2x + 1 = 0$$

Si la respuesta es afirmativa, determina un intervalo de amplitud menor que 2 en el que se encuentre la raíz.

Consideramos la función $f(x) = \textit{sen}\ x + 2x + 1$.

Tenemos que: $f(x)$ es continua en $[-1, 0]$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) \approx 1{,}84 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{array}\right\} \quad \textit{signo de } f(1) \neq \textit{signo de } f(0)$$

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$; es decir, la ecuación $\textit{sen}\ x + 2x + 1 = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(-1, 0)$.

s39 **Demuestra que la ecuación $x^5 + x + 1 = 0$ tiene, al menos, una solución real.**

Consideramos la función $f(x) = x^5 + x + 1$.

Tenemos que: $f(x)$ es continua en $[-1, 0]$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = -1 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{array}\right\} \quad \textit{signo de } f(-1) \neq \textit{signo de } f(0)$$

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$; es decir, la ecuación $x^5 + x + 1 = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(-1, 0)$.

s40 **Una ecuación polinómica de grado 3 es seguro que tiene alguna raíz real. Demuestra que es así, y di si ocurre lo mismo con las de grado 4.**

- Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es un polinomio de grado 3, tenemos que:

  — Si $a > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

  — Si $a < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

  Como f pasa de $+\infty$ a $-\infty$ o viceversa, podemos encontrar un número k tal que *signo de* $f(-k) \neq$ *signo de* $f(k)$.

  Además, $f(x)$ es continua. Por el teorema de Bolzano, sabemos que $f(x)$ tiene al menos una raíz c en el intervalo $(-k, k)$. Dicha raíz es la solución de la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

- Si $f(x)$ es un polinomio de grado 4, no ocurre lo mismo.

  Por ejemplo, $x^4 + 1 = 0$ no tiene ninguna raíz real; puesto que $x^4 + 1 > 0$ para cualquier valor de x.

s41 **Si el término independiente de un polinomio en x es igual a –5 y el valor que toma el polinomio para $x = 3$ es 7, razona que hay algún punto en el intervalo (0, 3) en el que el polinomio toma el valor –2.**

Si $f(x)$ es un polinomio, entonces es una función continua. El término independiente es igual a –5; es decir, $f(0) = -5$; y, además, $f(3) = 7$. Por tanto, aplicando el teorema de los valores intermedios, como $-5 < -2 < 7$, podemos asegurar que existe $c \in (0, 3)$ tal que $f(c) = -2$.

s42 **La función $y = tg\ x$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ y, sin embargo, no se anula en él. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?**

La función $y = tg\, x$ no es continua en $x = \frac{\pi}{2}$, que está en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Por tanto, no podemos aplicar el teorema de Bolzano para dicho intervalo.

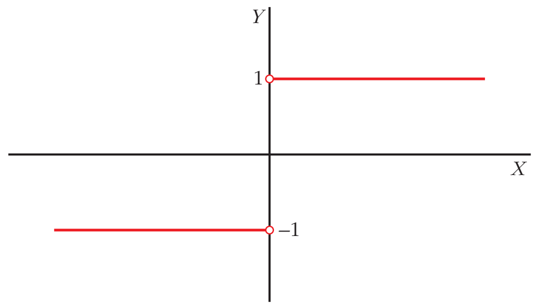
s43 **Considera la función $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Determina su dominio. Dibuja su gráfica y razona si se puede asignar un valor a $f(0)$ para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.**

Definimos f por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$, no podemos asignar ningún valor a $f(0)$ para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$ (pues en $x = 0$ no lo es). Tiene una discontinuidad de salto finito.

Gráfica:



s44 **Si existe el límite de una función $f(x)$ cuando $x \to a$, y si $f(x)$ es positivo cuando $x < a$, ¿podemos asegurar que tal límite es positivo? ¿Y que no es negativo? Justifica razonadamente las respuestas.**

Si $f(x) > 0$ cuando $x < a$, entonces, si existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, ha de ser $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq 0$.

Por tanto, podemos asegurar que el límite no es negativo (podría ser positivo o cero).

s45 **a) Comprueba que $\lim\limits_{x \to +\infty} [ln(x + 1) - ln(x)] = 0$.**

b) Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} x[ln(x + 1) - ln(x)]$.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [ln\,(x + 1) - ln\,(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\right] = ln\;1 = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x[ln\,(x + 1) - ln\,(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x\;ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x\right] =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right] = ln\;e = 1$$

s46 **De dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se sabe que son continuas en el intervalo $[a, b]$, que $f(a) > g(a)$ y que $f(b) < g(b)$.**

¿Puede demostrarse que existe algún punto c de dicho intervalo en el que se corten las gráficas de las dos funciones?

Consideramos la función $f(x) - g(x)$.

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a, b]$, entonces $f(x) - g(x)$ es continua en $[a, b]$.
- Si $f(a) > g(a)$, entonces $f(a) - g(a) > 0$.

- Si $f(b) < g(b)$, entonces $f(b) - g(b) < 0$.

Es decir, *signo* $[f(a) - g(a)] \neq$ *signo* $[f(b) - g(b)]$.

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) - g(c) = 0$, es decir, tal que $f(c) = g(c)$. (Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en $x = c$).

s47 **Si $f(x)$ es continua en [1, 9], $f(1) = -5$ y $f(9) > 0$, ¿podemos asegurar que la función $g(x) = f(x) + 3$ tiene al menos un cero en el intervalo [1, 9]?**

- Si $f(x)$ es continua en [1, 9], entonces $g(x) = f(x) + 3$ también será continua en [1, 9] (pues es suma de dos funciones continuas).
- Si $f(1) = -5$, entonces $g(1) = f(1) + 3 = -5 + 3 = -2 < 0$.
- Si $f(9) > 0$, entonces $g(9) = f(9) + 3 > 0$.

Es decir, *signo de* $g(1) \neq$ *signo de* $g(9)$.

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (1, 9)$ tal que $g(c) = 0$; es decir, la función $g(x)$ tiene al menos un cero en el intervalo [1, 9].

48 **Escribe una definición para cada una de estas expresiones y haz una representación de f:**

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$ **b)** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ **c)** $\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$ **e)** $\lim_{x \to -3} f(x) = +\infty$ **f)** $\lim_{x \to 1} f(x) = 4$

a) Dado $\varepsilon > 0$, existe h tal que, si $x < -h$, entonces $|f(x) - 3| < \varepsilon$.

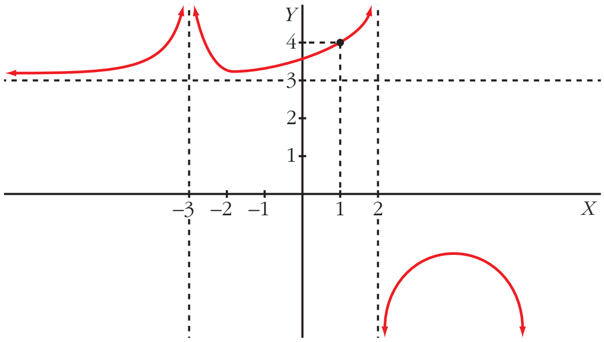
b) Dado k, podemos encontrar h tal que, si $x > h$, entonces $f(x) < -k$.

c) Dado k, podemos encontrar δ tal que, si $2 - \delta < x < 2$, entonces $f(x) > k$.

d) Dado k, podemos encontrar δ tal que, si $2 < x < 2 + \delta$, entonces $f(x) < -k$.

e) Dado k, podemos encontrar δ tal que, si $3 - \delta < x < 3 + \delta$, entonces $f(x) > k$.

f) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $1 - \delta < x < 1 + \delta$, entonces $|f(x) - 4| < \varepsilon$.



PARA PROFUNDIZAR

49 **Estudia el comportamiento de cada una de estas funciones cuando x tiende a $+\infty$:**

a) $f(x) = x^3 - sen\ x$ **b)** $g(x) = \dfrac{cos\ x}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{E[x]}{x}$ **d)** $j(x) = \dfrac{3x + sen\ x}{x}$

a) Como $-1 \le sen\ x \le 1$, entonces: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - sen\ x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

b) Como $-1 \le cos\ x \le 1$, entonces: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{cos\ x}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\pm 1}{x^2 + 1} = 0$

c) Como $x - 1 < E[x] < x$,

$$\frac{x-1}{x} < \frac{E[x]}{x} < \frac{x}{x} \to \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} < \lim_{x \to +\infty} \frac{E[x]}{x} < \lim_{x \to +\infty} 1 \to$$

$$\to \lim_{x \to +\infty} \frac{E[x]}{x} = 1$$

d) Como $-1 \le sen\ x \le 1$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + sen\ x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{sen\ x}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{\pm 1}{x}\right) = 3 + 0 = 3$$

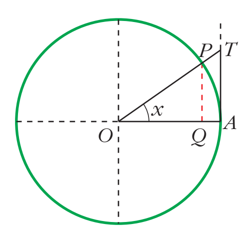
50 **En una circunferencia de radio 1, tomamos un ángulo $\widehat{AOP}$ de x radianes. Observa que:**

$\overline{PQ} = sen\ x$, $\overline{TA} = tg\ x$ y arco $\overset{\frown}{PA} = x$

Como $\overline{PQ} < \overset{\frown}{PA} < \overline{TA} \to sen\ x < x < tg\ x$

A partir de esa desigualdad, prueba que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$$



Tenemos que $sen\ x < x < tg\ x$. Dividiendo entre $sen\ x$, queda:

$$1 < \frac{x}{sen\ x} < \frac{1}{cos\ x} \to 1 > \frac{sen\ x}{x} > cos\ x$$

Tomando límites cuando $x \to 0$, queda:

$$1 \ge \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} \ge 1; \text{ es decir: } \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1.$$

51 **Sabiendo que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$, calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\text{sen } x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{2x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{2x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \text{sen } x}{x}$ **e)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x}{x}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\text{sen } x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\dfrac{\text{sen } x}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{2x} = 1 \left(\text{Si hacemos } 2x = z, \text{ tenemos } \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\text{sen } z}{z} = 1 \right)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\text{sen } x}{x} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \text{sen } x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(1 - \dfrac{\text{sen } x}{x} \right) = 1 - \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1 - 1 = 0$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x / \cos x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\text{sen } x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} \right) =$

$= 1 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\text{sen } x}{x} \right)^2 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + \cos x} =$

$= 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

52 **Supongamos que f es continua en [0, 1] y que $0 < f(x) < 1$ para todo x de [0, 1]. Prueba que existe un número c de (0, 1) tal que $f(c) = c$.**

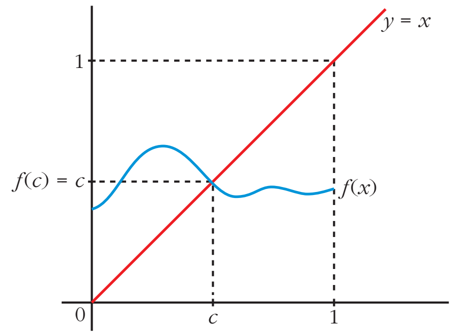
Haz una gráfica para que el resultado sea evidente.

☛ ***Aplica el teorema de Bolzano a la función $g(x) = f(x) - x$.***

Consideramos la función $g(x) = f(x) - x$. Tenemos que:

- $g(x)$ es continua en [0, 1], pues es la diferencia de dos funciones continuas en [0, 1].
- $g(0) = f(0) > 0$, pues $f(x) > 0$ para todo x de [0, 1].
- $g(1) = f(1) - 1 < 0$, pues $f(x) < 1$ para todo x de [0, 1].

Por el teorema de Bolzano, sabemos que existe $c \in (0, 1)$ tal que $g(c) = 0$, es decir, $f(c) - c = 0$, o bien $f(c) = c$.



Página 253

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 10x^2 - \sqrt{x^6 - 5x + 1}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{\log(x^2+1)}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 1} (x)^{1/(1-x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(2x + 1 - \sqrt{4x^2+1}\right)$

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 10x^2 - \sqrt{x^6 - 5x + 1} = -\infty$, porque el minuendo es de grado 2, y el sustraendo, de grado 3.

b) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{\log(x^2+1)} = \frac{(0)}{(+\infty)} = 0$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 1} (x)^{1/(1-x)}$ $\rightarrow$ Como es del tipo $(1)^{(+\infty)}$, podemos aplicar la regla:

$$\lim_{x \to 1} (x)^{1/(1-x)} = e^{\lim\limits_{x \to 1}\left((x-1)\cdot\frac{1}{1-x}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(2x + 1 - \sqrt{4x^2+1}\right) = (\infty) - (\infty)$

Resolvemos la indeterminación multiplicando y dividiendo por $2x + 1 + \sqrt{4x^2+1}$:

$$\frac{\left(2x+1-\sqrt{4x^2+1}\right)\left(2x+1+\sqrt{4x^2+1}\right)}{2x+1+\sqrt{4x^2+1}} = \frac{(2x+1)^2 - (4x^2+1)}{2x+1+\sqrt{4x^2+1}} = \frac{4x}{2x+1+\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{2x+1+\sqrt{4x^2+1}} = \frac{2}{2+\sqrt{4}} = \frac{4}{4} = 1$$

2. **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ **:**

a) Estudia su continuidad.

b) Halla $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **y** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$**.**

a) Si $x \neq 0$, f es continua, porque e^x y $1 - x$ son funciones continuas en $\mathbb{R}$.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = e^0 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (1 - x) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(1) \to f \text{ es continua en } \mathbb{R}.$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

3. **a) Estudia la continuidad de** $f(x) = \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 3x}$ **y justifica qué tipo de discontinuidad tiene.**

b) Halla sus límites cuando $x \to +\infty$ **y** $x \to -\infty$**.**

c) Representa la información obtenida en a) y b).

a) La función es discontinua en los puntos en los que no está definida. En este caso, en los puntos que anulan su denominador.

$$x^2 + 3x = 0 \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \end{array}$$

Estudiamos el tipo de discontinuidad:

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 3x} = \dfrac{(9)}{(0)} = \pm\infty \begin{array}{l} \text{Si } x \to 0^-, f(x) \to -\infty \\ \text{Si } x \to 0^+, f(x) \to +\infty \end{array}$

- $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 3x} = \dfrac{(0)}{(0)} \to \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\cancel{(3 + x)}(3 - x)}{x\cancel{(x + 3)}} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{3 - x}{x} = -2$

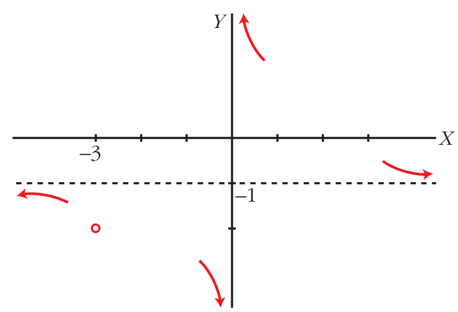
  En $x = 0$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

  En $x = -3$, tiene una discontinuidad evitable.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 3x} = -1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 3x} = -1$

c)



4. **Halla a para que** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{ax + 1}} = \dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{ax + 1}} = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; \frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; 4 = \sqrt{a} \;\rightarrow\; a = 16$$

5. **Halla a y b para que esta función sea continua y represéntala:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 0 \\ x - a & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{a}{x} + b & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} ax^2 + b = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x - a = -a \\ f(0) = -a \end{array}\right\} \quad b = -a \qquad (1)$$

Para que sea f continua en $x = 1$, debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} x - a = 1 - a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{a}{x} + b = a + b \\ f(1) = a + b \end{array}\right\} \quad 1 - a = a + b \qquad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos: $1 - a = a - a \;\rightarrow\; \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

Si $a = 1$ y $b = -1$, la función es continua en $x = 0$ y en $x = 1$.

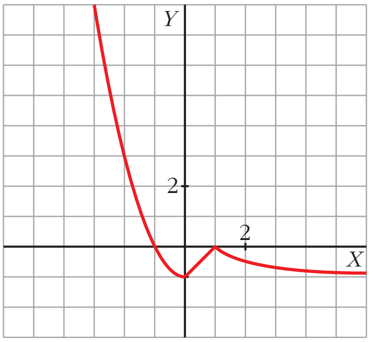
Para valores de $x < 0$ y $0 \le x < 1$, f está definida por medio de funciones polinómicas, que son continuas.

Para valores de $x \ge 1$, la función $\dfrac{a}{x} + b$ es también continua.

Por tanto, si $a = 1$ y $b = -1$, f es continua en todos sus puntos.

Representación:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{x} - 1 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$



6. Dada la función $f(x) = sen\ \dfrac{\pi}{4}x$, demuestra que existe un $c \in (0, 4)$ tal que $f(c) = f(c + 1)$.

Construimos la función $g(x) = f(x + 1) - f(x) = sen\ \dfrac{\pi(x + 1)}{4} - sen\ \dfrac{\pi x}{4}$.

Demostrar que $f(c + 1) = f(c)$ para algún $c \in (0, 4)$, es lo mismo que demostrar que existe $c \in (0, 4)$ tal que $g(c) = 0$.

$$g(0) = sen\ \frac{\pi(0 + 1)}{4} - sen\ \frac{\pi \cdot 0}{4} = sen\ \frac{\pi}{4} - sen\ 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

$$g(4) = sen\ \frac{5\pi}{4} - sen\ \pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

La función g es continua en $[0, 4]$ y *signo de* $g(0) \neq$ *signo de* $g(4)$.

Según el teorema de Bolzano, existirá un $c \in (0, 4)$ tal que $g(c) = 0$; es decir, existe un $c \in (0, 4)$ tal que $f(c + 1) = f(c)$.

7. Sea la función $f(x) = x + e^{-x}$. Demuestra que existe algún número real c tal que $c + e^{-c} = 4$.

$f(x) = x + e^{-x}$ es una función continua en $\mathbb{R}$. Calculamos algunos valores de f:

$f(0) = 0 + e^0 = 1$ $\quad\quad$ $f(5) = 5 + e^{-5} = 5{,}007$

Por el teorema de los valores intermedios, $f(x)$ toma todos los valores del intervalo $[1; 5{,}007]$.

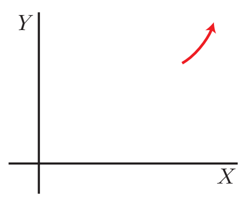
Por tanto, existirá un $0 < c < 5$ tal que $f(c) = 4$. Es decir, $c + e^{-c} = 4$

8. **Expresa simbólicamente cada una de estas frases y haz una representación gráfica de cada caso:**

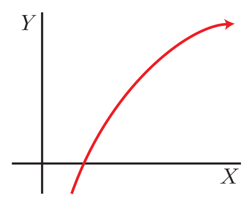
a) Podemos conseguir que $f(x)$ sea mayor que cualquier número K, por grande que sea, dando a x valores tan grandes como sea necesario.

b) Si pretendemos que los valores de $g(x)$ estén tan próximos a 1 como queramos, tendremos que dar a x valores suficientemente grandes.

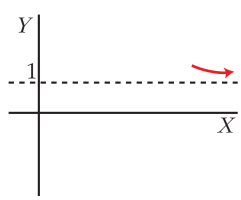
a) $\displaystyle \text{lím}_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



o bien



b) $\displaystyle \text{lím}_{x \to +\infty} g(x) = 1$



o bien