TEOREMAS

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Jun-04 (A).- C-2.- Demuéstrese que las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$ se cortan en un punto $x > 0$.

2.- Jun-05 (A).- C-4.- Aplicando el teorema de Lagrange de los incrementos finitos, demuéstrese que para $x > 0$ se verifica: $\operatorname{arctg}(2x) - \operatorname{arctg}(x) < \dfrac{x}{1+x^2}$.

3.- Jun-06 (A).- C-4.- Demostrar que las curvas f (x) = sen x y $g(x) = \dfrac{1}{x}$ se cortan en algún punto del intervalo $(2\pi, \dfrac{5\pi}{2})$.

4.- Sep-06 (A).- PR-2.- a) Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = xe^{-x}$, sus máximos y mínimos relativos, asíntotas y puntos de inflexión. Demuéstrese que para todo x se tiene que $f(x) \leq \dfrac{1}{e}$.

b) Pruébese que la ecuación $3x = e^x$ tiene alguna solución en $(-\infty, 1]$.

5.- Jun-07 (A).- C-4.- Demostrar que las curvas $f(x) = senx$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$ se cortan en algún punto del intervalo $\left(2\pi, \dfrac{5\pi}{2}\right)$.

6.- Jun-07 (B).- PR-2.- Sea la función $f(x)=x+e^{-x}$.
(a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y las asíntotas. Esbozar su gráfica.)
b) Demostrar que existe algún número real c tal que $c + e^{-c} = 4$.

7.- Sep-07 (A).- PR-2.- Sea f la función dada por $f(x) = e^{2x-x^2}$.
(a) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y las asíntotas de f.)
b) Determinar el número de soluciones de la ecuación $f(x) = 2$ en el intervalo $[0,1]$.

8.- Sep-07 (B).- C-3.- Discutir si la ecuación $x + \text{sen}\ x = 2$ tiene alguna solución real.

9.- Jun-08 (B).- C-3.- Demostrar que la ecuación $x^3 + x - 5=0$ tiene al menos una solución en el intervalo (1,2).

10.- Sep-09 (B).- C-3.- Probar que la ecuación $x^{2009} - e^x + 2 = 0$ tiene alguna solución.

11.- Jun-10-G (A).- E2. a) Si el término independiente de un polinomio *p*(*x*) es -5 y el valor que toma *p*(*x*) para x=3 es 7, ¿se puede asegurar que *p*(*x*) toma el valor 2 en algún punto del intervalo [0,3]? Razonar la respuesta y enunciar los resultados teóricos que se utilicen.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Jun-04 (A).- C-2.- **Sol.**: Aplicar Bolzano para h(x)=f(x)-g(x)

2.- Jun-05 (A).- C-4.- **Sol.:** $f(x) = arctgx$ *cumple las hipótesis del teorema en (x,2x); luego* $\exists c \in (x,2x)$ *tal que* $\frac{arctg 2x - arctgx}{2x-x} = f'(c) \Rightarrow$ $arctg 2x - arctgx = \frac{x}{1+c^2}$ *con* $x < c < 2x$. *Entonces, para c=x* $\Rightarrow arctg 2x - arctgx < \frac{x}{1+x^2}$, *ya que* $1+x^2 < 1+c^2$

3.- Jun-06 (A).- C-4.- Sol.: Aplicar Bolzano para h(x)=f(x)-g(x) en el intervalo $\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$.

4.- Sep-06 (A).- PR-2.- b) Sol.: Aplicar Bolzano a la función $f(x) = 3x - e^x$ en el intervalo $(-\infty,1]$

5.- Jun-07 (A).- C-4.- Sol.: Aplicar Bolzano para h(x)=f(x)-g(x) en el intervalo $\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$

6.- Jun-07 (B).- PR-2.- b) **Sol.:** cumple el teorema de los valores intermedios en el intervalo $[0,+\infty)$

7.- Sep-07 (A).- PR-2.- b) **Sol.:** La función $g(x) = e^{2x-x^2} - 2$ cumple el teorema de Bolzano en el intervalo $[0,1]$, por lo que al menos tiene una raíz en ese intervalo. Como siempre es creciente en ese intervalo (puesto que lo es f(x)), entonces tiene únicamente una raíz. Por lo tanto la ecuación $f(x) = 2$ tiene únicamente una solución real en $[0,1]$.

8.- Sep-07 (B).- C-3.- Sol.: La función $g(x) = x + sen\ x - 2$ cumple el teorema de Bolzano en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, por lo que al menos tiene una raíz en ese intervalo. Por lo tanto la ecuación $x + \operatorname{sen} x = 2$ tiene al menos una solución real $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

9.- Jun-08 (B).- C-3.- Sol.: Aplicando Bolzano a f(x)= $x^3 + x - 5$ en el intervalo (1,2)

10.- Sep-09 (B).- C-3.- Sol.: Aplicando Bolzano a f(x) en el intervalo $[-2,0]$.

11.- Jun-10-G (A).- E2. Sol.: Aplicando Bolzano a $f(x) = p(x) - 2$ en el intervalo $[0,3]$.