

REGLA DE L' HÔPITAL

Su aplicación permite resolver algunas indeterminaciones en el cálculo de límites de funciones derivables.

Regla de l' Hôpital

Si f y g son funciones continuas y derivables en un intervalo abierto que contiene a un punto x_0 verificando:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$
- $g'(x) \neq 0$ en cualquier $x \neq x_0$ del intervalo
- Existe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces, existe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Observaciones:

- La regla de L'Hôpital también se puede aplicar si $x \rightarrow \pm\infty$.
- La regla de L'Hôpital además de resolver indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ también se puede aplicar para resolver indeterminaciones del tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
- Si al calcular $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nos volvemos a encontrar en las condiciones establecidas por esta regla se puede volver aplicar de nuevo, y así sucesivamente las veces que consideremos oportunas para la consecución del límite buscado.
- Para resolver el resto de indeterminaciones no se puede aplicar directamente esta regla. En estos casos se han de transformar en una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ y después aplicar la regla de L'Hôpital.

Ejemplo 9: Utilizando la regla de L'Hôpital se pueden calcular fácilmente los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{\ln x} = \left[\frac{0}{0} \right] \underset{(L' \text{ Hôpital})}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x^2} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right] \underset{(L' \text{ Hôpital})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right] \underset{(L' \text{ Hôpital})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$$

NOTA: Las indeterminaciones que aparecen en el cálculo del límite se indican entre corchetes.

Ejemplo 10: Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = [0 \cdot (-\infty)] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{+\infty} \right] \underset{(L' \text{ Hôpital})}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = [+\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{(L' \text{ H\^o}pital)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{(L' \text{ H\^o}pital)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\ln x} = [1^{-\infty}] = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln x (1+x^2-1)} = e^{[(-\infty) \cdot 0]} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}} = e^{\left[\frac{-\infty}{+\infty} \right]} \stackrel{(L' \text{ H\^o}pital)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-2}} = e^0 = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2)^{\frac{1}{x}} = [(+\infty)^0] = e^{\ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2)^{\frac{1}{x}} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 2)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(x^2 + 2)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 2)}{x}} = e^{\left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]} \stackrel{(L' \text{ H\^o}pital)}{=} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 2}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 2}} = e^0 = 1$$