DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL, COMBINACIÓN LINEAL, BASE

EJERCICIO 1 : Dados los vectores $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(1, 1, 1)$, $\vec{c}(1, 0, 5)$ y $\vec{d}(-1, 1, 3)$:

a) ¿Forman una base de R^3?

b) Expresa, si es posible, el vector $\vec{d}$ como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

EJERCICIO 2 :

a) Se sabe que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes. ¿Podemos asegurar que $\vec{u}$ es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$? Justifica tu respuesta.

b) Halla las coordenadas del vector $\vec{a}(4, 3, 7)$ respecto de la base B = {(2, 1, 0), (1,0,-2),(0, 0, 3)}.

EJERCICIO 3 : Dados los vectores $\vec{u}(2, -1, 0)$ y $\vec{v}(3, 2, -1)$:

a) ¿Son linealmente independientes?

b) ¿Forman una base de R^3?

c) Halla un vector, $\vec{w}$, tal que $2\vec{u} + 3\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{v}$.

EJERCICIO 4 :

a) Halla los valores de x, y, z tales que $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = 0$, siendo $\vec{u}$ (2,0,-3), $\vec{v}$ (1,-2,0) y $\vec{w}$ (3,2,-6)

b) ¿Son linealmente independientes los tres vectores anteriores? ¿Forman una base de R^3?

EJERCICIO 5 : Consideramos la base de R^3 formada por los vectores : $\vec{a}$ (2,-1,3), $\vec{b}$ (0,2,-1), $\vec{c}$ (3,0,1)

a) Halla las coordenadas de $\vec{u}(4, -7, 14)$ respecto de la base anterior.

b) Expresa, si es posible, el vector $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{u}$.

PRODUCTO ESCALAR Y APLICACIONES (Módulo de un vector, ángulo que forman dos vectores, proyección ortogonal,...)

EJERCICIO 6 : Dados los vetores $\vec{u}(2, -1, 3)$, $\vec{v}(4, 2, -2)$ y $\vec{w}(1, 2, x)$:

a) Halla $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Obtén el valor de x para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ formen un ángulo de 60°.

EJERCICIO 7 : Dados los vectores $\vec{u}(1, 0, 0)$ y $\vec{v}(1, 1, 0)$:

a) Halla la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, así como el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Encuentra un vector $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que sea perpendicular a (1, 0, 0).

EJERCICIO 8 : Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores que forman un ángulo de 45° y que tienen, el mismo módulo $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$.

a) ¿Cuál es el módulo de $\vec{u} + \vec{v}$? ¿Y el de $\vec{u} - \vec{v}$?

b) Demuestra que $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son perpendiculares.

EJERCICIO 9 : Dados los vectores $\vec{a}(1, -1, 0)$, $\vec{b}(0, 1, -1)$ y $\vec{c} = m\vec{a} - \vec{b}$:

a) Halla el valor de m para que $\vec{a}$ y $\vec{c}$ sean perpendiculares.

b) Para $m = 2$, halla el ángulo que forman $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

EJERCICIO 10 : Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; halla x e y de forma que $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j}$ sea perpendicular a $\vec{b}$ y tenga el mismo módulo que $\vec{a}$.

PRODUCTO VECTORIAL

EJERCICIO 11 : Dados los vectores $\vec{u}(1,\ 3,\ 0)$ y $\vec{v}(2,\ 1,\ 1)$:

a) Halla un vector, $\vec{w}$, de módulo 1, que sea perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

b) ¿Cuál es el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

EJERCICIO 12 :

a) Demuestra que, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores cualesquiera, se tiene que:

$$(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v}) = 2(\vec{u}\times\vec{v})$$

b) Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(2,\ -1,\ 1)$ y a $\vec{v}(3,\ 0,\ -1)$.

EJERCICIO 13 : Halla el valor de m para que el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ (2,0,1) y $\vec{v}$ (0,m,1) sea 2.

EJERCICIO 14 :

a) Halla un vector unitario que sea perpendicular a (3, -1, 1) y a (1,-2,0)

b) ¿Es cierto que $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$? Pon un ejemplo.

EJERCICIO 15 : Halla el área de un paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{w}$, siendo: $\vec{u}(2,\ -1,\ 1)$, $\vec{v}(0,\ 1,\ -1)$ y $\vec{w}(1,\ 0,\ 1)$

PRODUCTO MIXTO

EJERCICIO 16 :

a) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u}$ (2,-1,1), $\vec{v}$ (3,0.-2), $\vec{w}$ (2,-3,0)

b) ¿Cuánto valen cada uno de los siguientes productos mixtos?: $[2\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}]$; $[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{u}+\vec{v}]$

EJERCICIO 17 :

a) Halla los valores de m para que los vectores $\vec{u}$ (0,1,1), $\vec{v}$ (-2,0,1) y $\vec{w}$ (m,m-1,1) sean linealmente independientes.

b) Estudia si el vector $(2,\ 1,\ 0)$ depende linealmente de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $m = 3$.

EJERCICIO 18 : Dados los vectores $\vec{u}$ (1,2,3), $\vec{v}$ (1,1,1) y $\vec{w}$ (1,λ,5), halla el valor de λ para que:

a) determinen un paralelepípedo de volumen 10. b) sean linealmente dependientes.

EJERCICIO 19 : Dados los vectores $\vec{u}(1,\ 0,\ -1)$, $\vec{v}(0,\ 2,\ -1)$ y $\vec{w}(2,\ -2,\ 1)$, se pide:

a) El volumen del paralelepípedo determinado por ellos.

b) Halla, si existe, el valor de α para que el vector $\vec{a}(\alpha,\ \alpha,\ -6)$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

EJERCICIO 20 :

a) Demuestra que los vectores $\vec{u}(k,\ -3,\ 2)$, $\vec{v}(k,\ 3,\ 2)$ y $\vec{w}(1,\ 0,\ 0)$ son linealmente independientes, cualquiera que sea el valor de k.

b) ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

APLICACIONES DE LOS VECTORES

EJERCICIO 27 : Los puntos $A(3,\ 0,\ 2)$, $B(5,\ -1,\ 1)$ y $C(-2,\ 3,\ 1)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo. Obtén el cuarto vértice y el centro del paralelogramo.

Solución: