TEMA 7:
PROBLEMAS MÉTRICOS EN EL ESPACIO

1. **Calcula el ángulo que forman las rectas** $\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{5}$ **y** $\frac{x-2}{-3} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{5}$

SOLUCIÓN:
Como los vectores directores $\vec{u}(3,4,5)$ y $\vec{v}(-3,-4,5)$ son perpendiculares, las rectas son por tanto perpendiculares, es decir forman ángulo de 90º.

2. **Dadas las rectas** $r \equiv 2x = y = z$ **y** $s \equiv 2x - 4 = y - 1 = z + 3$. **Halla el ángulo que forman y si existe el plano que las contiene**.

SOLUCIÓN:
La ecuación continua de las rectas es:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \text{ y } \frac{x-2}{\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{1}$$

Los vectores directores de las rectas son iguales, por tanto las rectas son paralelas o coincidentes. Si consideramos un punto cualquiera de la primera recta, por ejemplo el punto $P(0,0,0)$ podemos comprobar que no verifica la ecuación de la segunda, por tanto las rectas son paralelas.
En cuanto al plano que las contiene, dicho plano estará determinado por $\pi \equiv \left(P(0,0,0), \vec{u}\left(\frac{1}{2},1,1\right), \vec{v}(2,1,-3)\right)$. Siendo P un punto culaquiera de una de las rectas (en este caso de la primera recta), $\vec{u}$ el vector director de las rectas y $\vec{v}$ el vector que va desde el punto $P(0,0,0)$ de la primera recta, hasta el punto $Q(2,1,-3)$ de la segunda.
La ecuación general del plano π será:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4x + \frac{7}{2}y - \frac{3}{2}z = 0$$

3. **Calcula el ángulo que forman los planos** $\alpha \equiv x - y - 3z - 1 = 0$ **y** $\beta \equiv 3x + 2y - z + 3 = 0$

SOLUCIÓN:
Los vectores normales de dichos planos son $\overrightarrow{n_\alpha}(1,-1,-3)$ y $\overrightarrow{n_\beta}(3,2,-1)$ luego:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha} \bullet \overrightarrow{n_\beta}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|} = \frac{|3-2+3|}{\sqrt{1+1+9}\,\sqrt{9+4+1}} = \frac{4}{\sqrt{11}\,\sqrt{14}} = 0.322$$

$$\alpha \cong 71^{o}11'46''$$

4. **Halla el ángulo que forma el plano** $\alpha \equiv 3x+y-2z+7=0$ **y la recta** $r \equiv \begin{cases} x-2y-8=0 \\ 3x+z+8=0 \end{cases}$

SOLUCIÓN:
Necesitamos para determinar el ángulo, el vector director de la recta. Obtenemos para ello, las ecuaciones paramétricas de la misma, que serán

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2}t-4 \\ z = -3t-8 \end{cases}$$

Por tanto el vector director es $\vec{u}\left(1,\frac{1}{2},-3\right)$. De la ecuación general del plano, obtenemos el vector normal del mismo, $\vec{n}(3,1,-2)$.
El ángulo α que forman la recta y el plano verifica que:

$$sen\alpha = \frac{|\vec{n} \bullet \vec{u}|}{|\vec{n}||\vec{u}|} = \frac{\left|3+\frac{1}{2}+6\right|}{\sqrt{9+1+4}\,\sqrt{1+\frac{1}{4}+9}} = \frac{\frac{19}{2}}{\sqrt{14}\,\sqrt{\frac{41}{4}}} = \frac{19}{\sqrt{14}\,\sqrt{41}} = 0.793$$

$$\alpha \cong 52^{o}28'15''$$

5. **Plano que pasa por el punto** $P(3,-2,1)$ **y es perpendicular a** $r \equiv \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+z+3=0 \end{cases}$

SOLUCIÓN:
El plano pedido tendrá como vector normal, el vector director de la recta. Calculamos el vector director de la recta, multiplicando vectorialmente los vectores normales de los planos de su ecuación reducida:

$$\vec{u} = \overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} = -3\vec{j}-3\vec{k}$$

La determinación normal del plano pedido es $\alpha \equiv \left(P(3,-2,1),\vec{n}(0,-3,-3)\right)$, por tanto su ecuación general será

$$0(x-3)-3(y+2)-3(z-1)=0$$
$$-3y-3z-3=0$$

6. **Ecuación de la recta que pasa por** $P(2,-1,5)$ **y es paralela a los planos** $\alpha \equiv x-3y+z=0$ **y** $\beta \equiv 2x-y+3z-5=0$

SOLUCIÓN:
Si la recta pedida, es paralela al plano α, su vector director será perpendicular al vector normal de α.
Análogamente el vector director de la recta pedida, será también perpendicular al vector normal del plano β.
Por tanto un vector director de la recta pedida, será el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{n_\alpha}$ y $\overrightarrow{n_\beta}$.

$$\vec{u}=\overrightarrow{n_\alpha}\times\overrightarrow{n_\beta}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=-8\vec{i}-1\vec{j}+5\vec{k}$$

La determinación de esta recta será $r \equiv \left(P(2,-1,5),\vec{u}(-8,-1,5)\right)$
La ecuación continua de r

$$\frac{x-2}{-8}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-5}{5}$$

7. **Plano que pasa por los puntos** $A(2,2,-1)$ **y** $B(4,0,2)$ **y es perpendicular al plano** $\alpha \equiv x-5y+2z-6=0$

SOLUCIÓN:
La determinación lineal de dicho plano será $\pi \equiv \left(A(2,2,-1),\overrightarrow{AB}(2,-2,3),\vec{n}(1,-5,2)\right)$. Por tanto su ecuación general

$$\begin{vmatrix}x-2 & y-2 & z+1\\ 2 & -2 & 3\\ 1 & -5 & 2\end{vmatrix}=0 \Rightarrow 11x-y-8z-28=0$$

8. **Plano que pasa por** $A(1,0,-1)$, **es perpendicular a** $\alpha \equiv x-y+2z+1=0$ **y paralelo a la recta** $r \equiv \begin{cases} x-2y=0\\ z=0\end{cases}$

SOLUCIÓN:
El plano pedido (π) es perpendicular al plano α, por tanto e vector normal de este plano $\overrightarrow{n_\pi}$ será perpendicular al vector normal de α, $\overrightarrow{n_\alpha}$.

Además si el plano π es paralelo a la recta r, el vector normal de π ($\overrightarrow{n_\pi}$) será perpendicular al vector director de r ($\overrightarrow{u_r}(2,1,0)$ ya que las ecuaciones paramétricas de r son $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$).

Podemos pues considerar como vector normal de π el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{u_r}$

$$\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

La determinación normal del plano π será $\pi \equiv \left(A(1,0,-1), \vec{n}(-2,-4,3)\right)$, por tanto su ecuación

$$-2(x-1) - 4y + 3(z+1) = -2x - 4y + 3z + 5 = 0$$

9. **Plano que contiene a la recta** $r \equiv \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{-1} \right.$ **y es paralelo al plano** $\pi \equiv \begin{cases} x = t - s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$

SOLUCIÓN:
La determinación lineal del plano π será $\pi \equiv \left(P(0,0,0), \vec{u}(1,1,0), \vec{v}(-1,0,1)\right)$, por tanto su ecuación general

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + z = 0$$

Si el plano pedido es paralelo al plano π, su ecuación general será $x - y + z + K = 0$
Para que el plano π contenga a la recta r, debe tener al menos a dos de sus puntos (por ejemplo los puntos $P(1,1,-1)$ y $Q(3,-2,-2)$
Imponiendo la condición de que el plano π contenga al punto P calculamos el valor de K

$$1 - 1 - 1 + K = 0 \Rightarrow K = 1$$

Pero observamos que para este valor de K el plano $x - y + z + 1 = 0$ no contiene al punto $Q(3,-2,-2)$

$$3 + 2 - 2 + 1 \neq 0$$

Si observamos la recta r y el plano π, nos damos cuenta que la recta y el plano son secantes, por tanto no puede un plano paralelo a π contener a la recta r.

10. **Dados los planos** $\begin{matrix} \alpha \equiv x - y + z = 1 \\ \beta \equiv 2x + 3y - z = 0 \end{matrix}$, **calcula la ecuación de la recta r que pasa por el**

punto $A(1,0,0)$ **y es perpendicular a** α. **Calcula el coseno del ángulo formado por** r **y** β.

SOLUCIÓN:
Si r es perpendicular a α, un vector director de r será el vector normal de α. Luego la determinación lineal de r será $r \equiv \left(A(1,0,0), \vec{u}(1,-1,1)\right)$, y su ecuación normal $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$.
Si llamamos θ al ángulo formado por r y β, su seno será

$$sen\theta = \frac{|(1,-1,1) \bullet (2,3,-1)|}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{4+9+1}} = \frac{|2-3-1|}{\sqrt{3}\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{14}}$$

$$sen^2\theta = \frac{4}{42} = \frac{2}{21}$$

$$\cos^2\theta = 1 - sen^2\theta = 1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{19}{21}} = 0.951$$

11. **Calcula el punto simétrico del punto** $P(1,-3,7)$ **respecto de la recta** $r \equiv x-1 = y+3 = \frac{z-4}{3}$

SOLUCIÓN:
En primer lugar calculamos el plano perpendicular a r que pasa por $P(1,-3,7)$. La determinación normal de dicho plano será $\pi \equiv \left(P(1,-3,7), \vec{n}(1,1,3)\right)$ y su ecuación $1(x-1) + 1(y+3) + 3(z-7) = 0$ es decir $x + y + 3z - 18 = 0$.
En segundo lugar calculamos la intersección de dicho plano con la recta r. Para ello es conveniente obtener las ecuaciones paramétricas de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = -3+t \\ z = 4+3t \end{cases}$ que sustituimos en la ecuación general del plano para obtener el valor de t

$$1 + t - 3 + t + 3(4+3t) - 18 = 0 \Rightarrow -8 + 11t = 0 \Rightarrow t = \frac{8}{11}$$

La intersección de la recta y el plano es el punto

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{8}{11} = \frac{19}{11} \\ y = -3 + \frac{8}{11} = \frac{-25}{11} \\ z = 4 + 3\left(\frac{8}{11}\right) = \frac{68}{11} \end{cases} \Rightarrow Q = \left(\frac{19}{11}, \frac{-25}{11}, \frac{68}{11}\right)$$

Finalmente el simétrico será el punto $P'(x,y,z)$, siendo Q el punto medio del segmento PP'. Es decir

$$\frac{19}{11} = \frac{x+1}{2} \Rightarrow x = \frac{27}{11}$$

$$\frac{-25}{11} = \frac{y-3}{2} \Rightarrow y = -\frac{17}{11}$$

$$\frac{68}{11} = \frac{z+7}{2} \Rightarrow z = \frac{59}{11}$$

Luego el punto simétrico es $P'\left(\frac{27}{11},-\frac{17}{11},\frac{59}{11}\right)$

12. **Dado el plano** α **de ecuación** $2x-y+2z=4$ **y el punto** $A(1,3,-2)$. **Se pide**:
   a. **Distancia del punto al plano**.
   b. **Coordenadas de la proyección ortogonal de** A **sobre α (es decir el punto de intersección con** α **de la recta perpendicular a** α **por** A

SOLUCIÓN:

a. La distancia de un punto A a un plano α es

$$d(A,\alpha)=\frac{|2-3-4-4|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{9}{3}=3$$

b. Calculamos en primer lugar la ecuación de la recta perpendicular a α por el punto A. La determinación lineal de dicha recta será $r\equiv\left(A(1,3,-2),\vec{u}(2,-1,2)\right)$, por tanto sus ecuaciones paramétricas son $r\equiv\begin{cases}x=1+2t\\ y=3-t\\ z=-2+2t\end{cases}$

La intersección de r con α será

$$2(1+2t)-(3-t)+2(-2+2t)-4=0\Rightarrow t=1$$

La proyección ortogonal de A sobre α es el punto A' de coordenadas

$\begin{cases}x=1+2=3\\ y=3-1=2\\ z=-2+2=0\end{cases}$ es decir $A'=(3,2,0)$

13. **Calcula el punto simétrico del punto** $P(1,0,2)$ **respecto al plano** $\alpha\equiv x+y+z-2=0$

SOLUCIÓN:

En primer lugar calculamos la recta perpendicular al plano por P.

La determinación lineal de dicha recta será $r\equiv\left(P(1,0,2),\vec{u}(1,1,1)\right)$, y las ecuaciones paramétricas son $r\equiv\begin{cases}x=1+t\\ y=t\\ z=2+t\end{cases}$

La intersección de r con α nos dará el punto Q, proyección ortogonal de P sobre α

$$1+t+t+2+t-2=0\Rightarrow t=-\frac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\\ y=-\frac{1}{3}\\ z=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow Q=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$$

El punto Q será el punto medio del segmento PP' (siendo $P'(x,y,z)$ el simétrico del punto P), luego

$$\frac{2}{3} = \frac{1+x}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$
$$-\frac{1}{3} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}$$
$$\frac{5}{3} = \frac{2+z}{2} \Rightarrow z = \frac{4}{3}$$

Luego el punto simétrico de P respecto del plano α es $P'\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

14. **Ecuación del plano paralelo a** $2x - 2y + z - 8 = 0$ **y que diste 5 unidades del mismo**.

SOLUCIÓN:
Todos los planos paralelos al dado tienen por ecuación general $2x - 2y + z + K = 0$.
Si consideramos un punto cualquiera del plano $2x - 2y + z - 8 = 0$, por ejemplo el punto $P(0, 0, 8)$, la distancia de este punto al plano buscado dbe ser 6 u., por tanto:

$$d(P, \alpha) = \frac{|8+K|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|8+K|}{3} = 5 \Rightarrow |8+K| = 15 \Rightarrow \begin{cases} 8+K = 15 \Rightarrow K = 7 \\ 8+K = -15 \Rightarrow K = -23 \end{cases}$$

Por tanto hay dos planos que distan 6 u. del plano dado y son $2x - 2y + z + 7 = 0$ y $2x - 2y + z - 23 = 0$

15. **Sea el punto** $A(1, 1, 3)$ **y la recta** $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}$. **Halla**:

a. **Ecuación del plano perpendicular a** r **que pasa por A**.
b. **Intersección de este plano con la recta dada** r.
c. **Distancia del punto A a la recta** r.

SOLUCIÓN:

a. Un vector normal del plano perpendicular a r será el vector director de la recta r, por tanto la determinación normal del plano pedido en el apartado a) es $\alpha \equiv \left(A(1, 1, 3), \vec{n}(1, 1, 2)\right)$ y su ecuación será

$$1(x-1) + 1(y-1) + 2(z-3) = 0$$
$$x + y + 2z - 8 = 0$$

b. La intersección de este plano con la recta dada la obtenemos resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \\ x + y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

$$t+2+t+2t-8 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$
$$x = \frac{3}{2}$$
$$y = 2+\frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$
$$z = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3$$

Por tanto la intersección de la recta y el plano(proyección ortogonal de A sobre r) es $Q\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2},3\right)$

c. La distancia de A a la recta, será la distancia de A al punto Q, proyección ortogonal de A sobre r.

$$d(A,r) = d(A,Q) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(\frac{7}{2}-1\right)^2+(3-3)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}+0} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2} \text{ u.}$$

16. **Halla la distancia entre las rectas** $r \equiv \begin{cases} x-2 = 0 \\ y+3 = 0 \end{cases}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x-2z = 0 \\ y+z = 3 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Las ecuaciones paramétricas de r y s son

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2s \\ y = 3-s \\ z = s \end{cases}$$

Como los vectores directores $\vec{u}(0,0,1)$ y $\vec{v}(2,-1,1)$ tienen distintas direcciones, las rectas se cortan o se cruzan.

Si estudiamos el rango de la matriz $ran\left[\overrightarrow{P_rP_s},\vec{u},\vec{v}\right]$ tenemos que

$$ran\left[\overrightarrow{P_rP_s},\vec{u},\vec{v}\right] = ran\begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

Por tanto las rectas se cruzan y la distancia será

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \text{ u.}$$

Ya que $\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s},\vec{u},\vec{v}\right]\right| = \begin{vmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 10$

y $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} = 1\vec{i}+2\vec{j}+0\vec{k}$ luego

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5}$$

17. **Dadas las rectas** $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 1-t \end{cases}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x = 1+s \\ y = 2 \\ z = 2s \end{cases}$

a. **Estudia su posición relativa en el espacio**.
b. **Calcula la distancia entre ellas**.
c. **Encuentra una recta que corte perpendicularmente a ambas**.

SOLUCIÓN:

a. La determinación lineal de las rectas r y s es:

$$r \equiv \left(P_r(0,-1,1), \vec{u_r}(1,0,-1)\right) \quad \text{y} \quad s \equiv \left(P_s(1,2,0), \vec{u_s}(1,0,2)\right)$$

Como los vectores directores no son proporcionales, las rectas llevan direcciones diferentes, es decir, se cortan o se cruzan.
Si estudiamos el rango de la matriz formada por los vectores $\vec{u_r}, \vec{u_s}$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$, tenemos que

$$ran\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = 3$$

Ya que el determinante de la matriz es –9 (distinto de cero).
Por tanto las rectas se cruzan.

b. La distancia entre estas dos rectas es

$$d(r,s) = \frac{\left[\vec{u_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right]}{\vec{u_r} \times \vec{u_s}} = \frac{-9}{3} = -3$$

Ya que:

$$\left[\vec{u_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -9 \quad \text{y}$$

$$\vec{u_r} \times \vec{u_s} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k} = 0\vec{i} - 3\vec{j} + 0\vec{k} = -3\vec{j} \Rightarrow |\vec{u_r} \times \vec{u_s}| =$$

c. Sean $P(t,-1,1-t)$ y $Q(1+s,2,2s)$ los puntos de corte de la perpendicular con las rectas r y s respectivamente.
El vector $\overrightarrow{PQ}$ deberá ser un vector perpendicular a r y a s y por tanto a sus vectores directores. Por tanto

$$\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{u_r} = 0$$
$$\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{u_s} = 0$$

Luego
$\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{u_r} = (1+s-t, 3, -1+t+2s) \bullet (1,0,-1) = 2-s-2t = 0$
$\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{u_s} = (1+s-t, 3, -1+t+2s) \bullet (1,0,2) = -1+5s+t = 0$
Obtenemos así el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2 - s - 2t = 0 \\ -1 + 5s + t = 0 \end{cases}$$

cuya solución es $s = 0$ y $t = 1$
Por tanto los puntos de corte de la recta perpendicular con r y s son $P(1,-1,0)$ y $Q(1,2,0)$
La recta perpendicular a r y a s que las corta a ambas, es la recta que pasa por los puntos P y Q. Su determinación lineal será

$$p \equiv \left(P(1,-1,0), \overrightarrow{PQ}(0,3,0)\right)$$

Sus ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 3t \\ z = 0 \end{cases}$$

18. **Determina un punto de la recta** $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$ **que equidiste de los planos** $3x + 4y - 1 = 0$ **y** $4x - 3z - 1 = 0$. ¿**Es única la solución**?.

SOLUCIÓN:
Como las ecuaciones paramétricas de la recta dada son

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$

Un punto de la recta será de la forma $P(1 + 2t, -1 + 3t, -2 + 2t)$
Tenemos pues que averiguar el valor de t para que se verifique

$$d(P,\alpha) = d(P,\beta)$$

$$\frac{|3(1+2t) + 4(-1+3t) - 1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|4(1+2t) - 3(-2+2t) - 1|}{\sqrt{16+9}}$$

$$|3(1+2t) + 4(-1+3t) - 1| = |4(1+2t) - 3(-2+2t) - 1|$$

$$|-2 + 18t| = |9 + 2t|$$

$$-2 + 18t = \pm(9 + 2t)$$

Se obtienen las siguientes soluciones

- $-2 + 18t = 9 + 2t \Rightarrow t = \frac{11}{16}$
- $-2 + 18t = -(9 + 2t) \Rightarrow t = -\frac{7}{20}$

Que nos dan los puntos $P\left(1 + 2\left(\frac{11}{6}\right), -1 + 3\left(\frac{11}{6}\right), -2 + 2\left(\frac{11}{6}\right)\right)$
y $Q\left(1 + 2\left(-\frac{7}{20}\right), -1 + 3\left(-\frac{7}{20}\right), -2 + 2\left(-\frac{7}{20}\right)\right)$
Es decir $P\left(\frac{14}{3}, \frac{9}{2}, \frac{5}{3}\right)$ y $Q\left(\frac{3}{10}, -\frac{41}{20}, -\frac{27}{10}\right)$