Tercera Parte: Producto Vectorial y Producto Mixto entre vectores

Introducción

Retomemos el caso los dos pintores: Carlos y Juan. Finalizada la tarea de mover el escritorio, el arquitecto que coordina la obra, indica a los pintores sacar de la pared una llave de gas vieja que esta en desuso. Para extraerla, los pintores, necesitan una llave de fuerza por lo que el ''*esfuerzo*'' no terminó.

En la caja de herramientas de Carlos hay llaves de distinto tamaño y longitud por lo que toman una al azar y Juan comienza a trabajar, después de numerables intentos la tuerca de la llave de gas no se mueve por lo que decide elegir una llave más larga e intentando nuevamente comienza a moverse. Como el movimiento es muy lento pues la tuerca esta oxidada, Juan le pide ayuda a Carlos, y entre los dos logran moverla mas rápidamente hasta sacarla.

Si imaginamos la situación, notaremos que el sentido en el que avanza la tuerca es perpendicular a la llave que se emplea y a la fuerza aplicada, y además intuitivamente podemos concluir que cuanto mayor es la distancia entre la fuerza aplicada y el punto de apoyo (usan una llave más larga) y cuanto mayor es la intensidad de la fuerza aplicada más fácil es mover la tuerca por lo que tenemos en juego tres vectores, a saber: el vector que caracteriza a la distancia del punto de apoyo a la fuerza, la fuerza que se aplica y un vector perpendicular a ambos que describe el movimiento de la tuerca.

Llegados a este punto, la pregunta oportuna es: ¿existirá algún modelo matemático que describa la situación?. Es decir ¿existirá alguna operación entre vectores que de cómo resultado otro vector que sea perpendicular a estos?.

La respuesta es *si*, el modelo matemático es la operación entre vectores llamada **producto vectorial**, ésta operación que permite obtener al vector que caracteriza el movimiento de la tuerca, es llamado vector momento y se escribe de la siguiente forma: $\mathbf{m} = \mathbf{F} \times \mathbf{d}$.

En esta sección del módulo, estudiaremos dos productos entre vectores, el producto vectorial entre vectores, y el producto que se define a partir del producto escalar y del producto vectorial que se denomina: producto mixto.

Propósitos

Será muestra intención que cuando finalice la lectura de la tercera sección de la unidad pueda dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las características del vector que se obtiene al efectuar el producto vectorial entre vectores?
- ¿Cuál es la expresión de cálculo del producto vectorial entre vectores?
- ¿Qué propiedades cumple el producto vectorial entre vectores?
- ¿Qué interpretación geométrica admite la norma del producto vectorial entre vectores?
- ¿Qué operaciones y en qué orden deben efectuarse para calcular un producto mixto entre vectores?
- ¿Cuál es la expresión de cálculo del producto mixto entre vectores?
- ¿Cómo se establece si tres vectores del espacio tridimensional son coplanares?
- ¿Qué interpretación geométrica admite el valor absoluto del producto mixto entre vectores?

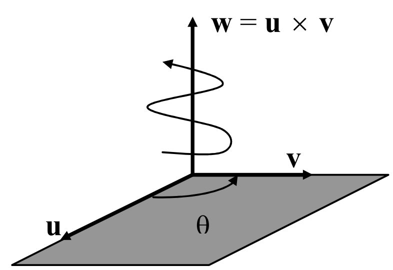
A medida que avance en la lectura, recuerde estas preguntas
ya que ellas son la guía de su estudio.

Producto vectorial entre vectores

El producto vectorial entre dos vectores: **u** y **v** de R^3, distintos del vector nulo, da por resultado un vector **w** con las siguientes características:

- La dirección del vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es perpendicular a la dirección del vector **u** y a la dirección del vector **v**. Por lo tanto, $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es perpendicular al plano que determinan **u** y **v**.
- El sentido del vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ se puede determinar mediante la *regla de la mano derecha*. Sea θ el ángulo entre **u** y **v**, si suponemos que los dedos de la mano derecha se mueven siguiendo el giro del vector **u** según el ángulo θ hasta coincidir con el vector **v**, entonces el pulgar de la mano derecha indicará el sentido del vector: $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$
- La norma del vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es: $\| \mathbf{w} \| = \| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \| = \| \mathbf{u} \| . \| \mathbf{v} \| . \operatorname{sen} \theta$ (siendo θ el ángulo entre **u** y **v**)

D



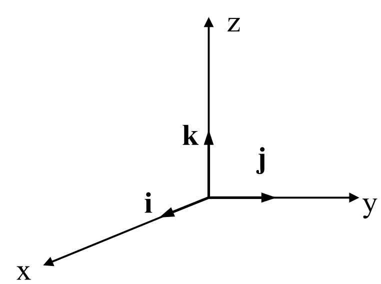
Teniendo en cuenta la definición de producto vectorial, pueden deducirse el producto vectorial entre los versores canónicos:

$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$ $\quad$ $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$ $\quad$ $\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$

$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ $\quad$ $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$

$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$ $\quad$ $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$

$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ $\quad$ $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$



Comprobar los resultados anteriores usando el concepto de norma del producto vectorial y aplicando la regla de la mano derecha.

Propiedades del producto vectorial entre vectores

Sean **u**, **v** y **w** tres vectores de R^3 y sea $\alpha \in R$, entonces:

1. El producto vectorial es *anticonmutativo*: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
2. El producto vectorial de vectores paralelos es el vector nulo: Si $\mathbf{u} \,//\, \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$
3. *Consecuencia propiedad* (2): $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
4. Si uno de los vectores del producto vectorial es el vector nulo entonces el producto vectorial es el vector nulo: $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$
5. El producto vectorial es distributivo respecto de la suma de vectores (a derecha y a izquierda) teniendo en cuenta la anticonmutatividad de la operación:
   $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$
   $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{w} \times \mathbf{u}$
6. Extracción de un escalar del producto vectorial: $(\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\alpha\mathbf{v}) = \alpha\,(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

Ejemplo

Aplicando propiedades del producto vectorial reducir a una mínima expresión:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v})$$

Observemos que en la expresión dada es posible aplicar la propiedad distributiva del producto vectorial respecto de la suma, entonces:

$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{u} + \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{v} \times \mathbf{v}$

En ésta expresión tenemos que: $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, por lo tanto:

$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{0} + \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}$

Luego, sabemos que el producto vectorial es anticonmutativo, es decir: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

Entonces:

$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) + \mathbf{v} \times \mathbf{u}$

y como estos vectores son opuesto, resulta que:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

Ejercicio

1. Comprobar que las siguientes igualdades son verdaderas.
   a) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{v} - \mathbf{u}) = 2\,\mathbf{u} \times \mathbf{v}$
   b) $\mathbf{u} \times (\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u}) + \mathbf{v} \times (\beta\mathbf{v} + \alpha\,\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

Fórmula del producto vectorial entre vectores en función de sus componentes

Sean los vectores: $\mathbf{u} = u_x\,\mathbf{i} + u_y\,\mathbf{j} + u_z\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$

Entonces, para calcular el producto vectorial entre los vectores **u** y **v** de R^3 en función de sus componentes se utiliza la función de determinante[1].

Primero se arma un determinante de tercer orden y se lo desarrolla en tres determinantes de orden dos, tal como se muestra a continuación:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

D

Luego, al desarrollar cada determinante de orden dos, obtendremos las componentes del vector que resulta del producto vectorial, esto es:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v} = (u_yv_z - u_zv_y)\,\mathbf{i} - (u_xv_z - u_zv_x)\,\mathbf{j} + (u_xv_y - u_yv_x)\,\mathbf{k}$$

D

Ejemplos:

- Efectuar el producto vectorial entre los vectores: $\mathbf{u} = 2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 5\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 7\,\mathbf{k}$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}\mathbf{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{w} = (3.7 - 4.6)\,\mathbf{i} - (2.7 - 4.5)\,\mathbf{j} + (2.6 - 3.5)\,\mathbf{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}}$$

EJEMPLO

- Efectuar el producto vectorial entre los vectores: $\mathbf{u} = (1;0;3)$ y $\mathbf{v} = (2;3;9)$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} ; -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v} = (-9\,;-3\,;3)}$$

EJEMPLO

[1] En otra unidad unidad temática estudiaremos la función determinante y sus propiedades, en este momento sólo nos interesan los determinantes como método de cálculo.

Demostración

Sean los vectores: $\mathbf{u} = u_x\,\mathbf{i} + u_y\,\mathbf{j} + u_z\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$

Entonces:

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_x\,\mathbf{i} + u_y\,\mathbf{j} + u_z\,\mathbf{k}) \times (v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}) =$

Aplicamos la propiedad distributiva del producto vectorial respecto de la suma de vectores y además aplicamos la propiedad de extracción de factores del producto vectorial, resultando:

$$= \cancel{(u_xv_x)\,\underbrace{(\mathbf{i} \times \mathbf{i})}_{=\mathbf{0}}} + (u_xv_y)\,\underbrace{(\mathbf{i} \times \mathbf{j})}_{=\mathbf{k}} + (u_xv_z)\,\underbrace{(\mathbf{i} \times \mathbf{k})}_{=-\mathbf{j}} +$$

$$+ (u_yv_x)\,\underbrace{(\mathbf{j} \times \mathbf{i})}_{=-\mathbf{k}} + \cancel{(u_yv_y)\,\underbrace{(\mathbf{j} \times \mathbf{j})}_{=\mathbf{0}}} + (u_yv_z)\,\underbrace{(\mathbf{j} \times \mathbf{k})}_{=\mathbf{i}} +$$

$$+ (u_zv_x)\,\underbrace{(\mathbf{k} \times \mathbf{i})}_{=\mathbf{j}} + (u_zv_y)\,\underbrace{(\mathbf{k} \times \mathbf{j})}_{=-\mathbf{i}} + \cancel{(u_zv_z)\,\underbrace{(\mathbf{k} \times \mathbf{k})}_{=\mathbf{0}}} =$$

Observemos que tres de los términos son iguales al vector nulo y los restantes se agrupan de a dos, pues dan por resultado un versor canónico o su opuesto, entonces agrupando tendremos el vector resultado del producto vectorial entre los vectores **u** y **v**:

$$= (u_yv_z - u_zv_y)\,\mathbf{i} + (u_zv_x - u_xv_z)\,\mathbf{j} + (u_xv_y - u_yv_x)\,\mathbf{k} \qquad \textbf{(I)}$$

La expresión **(I)** es el resultado del producto vectorial entre dos vectores, pero si en ella reemplazamos al segundo término por su opuesto, ésta expresión coincidirá con el desarrollo según la Regla de Laplace de un determinante de orden tres, por esto se tiene que:

$$\Rightarrow \quad (u_yv_z - u_zv_y)\,\mathbf{i} - (u_xv_z - u_zv_x)\,\mathbf{j} + (u_xv_y - u_yv_x)\,\mathbf{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}\mathbf{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

qdlp.#

Ejercicios

2. Sean: $\mathbf{u} = (-1;2;-1)$, $\mathbf{v} = (0;3;-1)$ y $\mathbf{w} = (4;-8\,;4)$. Efectuar las siguientes operaciones:

a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ b) $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

c) $(2\mathbf{u}) \times \mathbf{v}$ d) $\mathbf{u} \times (2\mathbf{v})$

e) $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$ f) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$

g) $\| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \|$ h) $\| \mathbf{v} \times \mathbf{u} \|$

3. Considerando que: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (3a;0;4a)$ donde $a \in R - \{0\}$ determinar el resultado de las siguientes operaciones.

a) $-(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ b) $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

c) $(5\mathbf{u}) \times (2\mathbf{v})$ d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{i}$

4. En cada caso encontrar vectores que satisfagan las siguientes condiciones:

a) Tenga norma $\sqrt{2}$ y sea perpendicular al vector $\mathbf{u} = \left(\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,;0\right)$ y al vector $\mathbf{v} = \left(\sqrt{3}\,;0\,;\sqrt{3}\right)$

b) Tenga norma 1 y sea perpendicular al vector $\mathbf{u} = \left(a^2\,;a^2\,;1\right)$ y al eje x (siendo a un número real positivo)

5. Si θ es el ángulo entre los vectores: **u** y **v** y siendo $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} \neq 0$ demuestre que:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \|}{(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})}$$

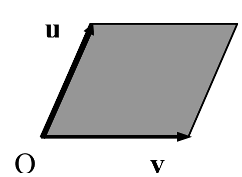
Interpretación geométrica de la norma del producto vectorial

Sean los vectores: $\mathbf{u} = u_x\,\mathbf{i} + u_y\,\mathbf{j} + u_z\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$ no paralelos

Si consideramos los vectores **u** y **v** con un origen común, ellos determinan dos de los lados no paralelos de un paralelogramo cuyo área es la norma del producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Es decir:

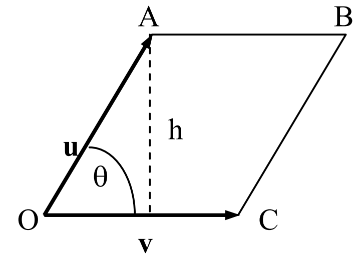
Área Paralelogramo $= \| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \|$



Demostración:

Sean los vectores **u** y **v** considerados con origen común en el punto O.

Estos vectores permiten definir al paralelogramo OABC, cuyo área es:



Área OABC = Long Base . Long Altura = $\overline{OC}$. h

Observemos que: Long Base = $\overline{OC}$ = $\|\mathbf{v}\|$

y que: Long Altura = h = $\|\mathbf{u}\|.\operatorname{sen}\theta$

En consecuencia:

$$\text{Área OABC} = \|\mathbf{v}\| \,.\, \|\mathbf{u}\|.\operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(II)}$$

Claramente, la expresión (II) equivale a la norma del producto vectorial entre los vectores **u** y **v** por lo tanto:

$$\underline{\textit{\textbf{Área Paralelogramo}} = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|} \qquad \textbf{qdlp.\#}$$

Ejemplo:

Determinar el área del paralelogramo que determinan los vectores: **u** = (–4,0;5) y **v** = (–4,3;0)

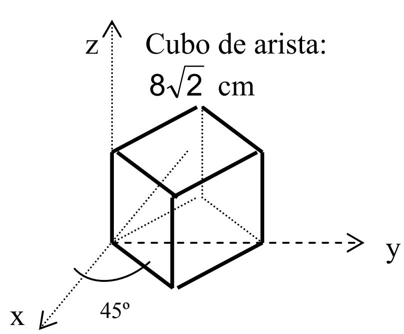
El área del paralelogramo es el valor de la norma del producto vectorial entre los vectores **u** y **v**, entonces, primero calculamos el producto vectorial:

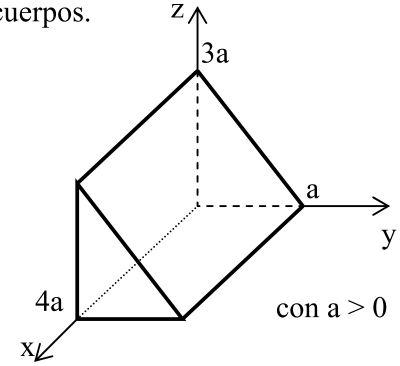
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 0 & 5 \\ -4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-15;-20;-12)$$

Luego: Área Paralelogramo = $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|(-15;-20;-12)\| = \sqrt{769}$

Ejercicios

6. Utilizando la norma del producto vectorial entre vectores, obtener el valor de la superficie total de los siguientes las cuerpos.





Producto mixto entre vectores

El producto mixto entre tres vectores: **u**, **v** y **w** de R^3 es el número real que se obtiene de efectuar primero un producto vectorial y luego un producto escalar.

En símbolos: ***Producto mixto*** $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

D

Ejemplo:

Sean los vectores: $\mathbf{u} = (4,1;1)$, $\mathbf{v} = (2,3;0)$ y $\mathbf{w} = (5,0;2)$. Obtener: $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

Para obtener el resultado del producto mixto, resolvemos primero el producto vectorial y luego el producto escalar, entonces:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (6;-4;-15) \Rightarrow \mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (4;1;1) \bullet (6;-4;-15) = 5$$

EJEMPLO

Fórmula del producto mixto entre vectores en función de sus componentes

Una manera para calcular el producto mixto: $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ entre tres vectores de R^3 es tal como se muestra en el ejemplo previo: efectuando el producto vectorial y luego el producto escalar. Sin embargo existe otro procedimiento equivalente al anterior y que se correponde con calcular el determinante de orden tres que se arma a partir de las componentes de los vectores, como se muestra a continuación:

$$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} u_x - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} u_y + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} u_z$$

D

***Demostración*:**

Sean los vectores $\mathbf{u} = u_x\,\mathbf{i} + u_y\,\mathbf{j} + u_z\,\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = w_x\,\mathbf{i} + w_y\,\mathbf{j} + w_z\,\mathbf{k}$

Entonces:

$$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (u_x\,\mathbf{i} + u_y\,\mathbf{j} + u_z\,\mathbf{k}) \bullet \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} =$$

$$= (u_x\,\mathbf{i} + u_y\,\mathbf{j} + u_z\,\mathbf{k}) \bullet \left(\begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} u_x - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} u_y + \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} u_z \qquad \textbf{(III)}$$

La expresión **(III)** es el resultado del producto mixto entre dos vectores, pero este cálculo coincide con el desarrollo según la Regla de Laplace de un determinante de orden tres, por esto se tiene que:

$$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \qquad \textbf{qdlp.\#}$$

Ejemplo:

Sean los vectores: **u** = (0,1;1), **v** = (0,3;0) y **w** = (5,0;2). Calculamos:

$$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} .0 - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} .1 + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} .1 = -15$$

EJEMPLO

$$\mathbf{v} \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} .0 - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} .3 + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} .0 = 15$$

Para el lector dejamos el cálculo de los productos mixtos: $\mathbf{v} \bullet (\mathbf{w} \times \mathbf{u})$ y $\mathbf{w} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

¿Qué conclusión puede extraer?

Propiedades del producto mixto entre vectores

Sean **u**, **v** y **w** vectores de R^3. Entonces:

1. El producto mixto de los vectores **u**, **v** y **w** es ***cíclico***.

2. Si los vectores **u**, **v** y **w** considerados con un origen común son ***coplanares*** entonces el producto mixto es nulo.

3. *Consecuencia propiedad* (2):

- Los vectores **u**, **v** y **w** son linealmente dependientes si y sólo si el producto mixto es nulo.
- Los vectores **u**, **v** y **w** son linealmente independientes si y sólo si el producto mixto no es nulo.

Ejercicios:

7. Calcular:

a) $\mathbf{i} \bullet (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$ b) $\mathbf{i} \bullet (\mathbf{k} \times \mathbf{j})$ c) $\mathbf{k} \bullet (\mathbf{i} \times \mathbf{j})$

d) $\mathbf{k} \bullet (\mathbf{j} \times \mathbf{i})$ e) $\mathbf{j} \bullet (\mathbf{i} \times \mathbf{k})$ f) $\mathbf{j} \bullet (\mathbf{k} \times \mathbf{i})$

Los resultados que obtuvo ¿están relacionados con alguna de las propiedades del producto mixto?

8. Determinar el valor de a $\in$R para que los vectores: $\mathbf{u} = (0,1;1)$, $\mathbf{v} = (a,3;0)$ y $\mathbf{w} = (a,a;1)$ sean coplanares.

¿Qué propiedad del producto mixto permite resolver este ejercicio?

9. Analizar si los siguientes conjuntos de vectores del espacio vectorial R^3 son linealmente independientes o dependientes:

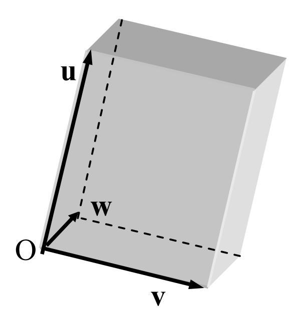
a) $A = \{(1;2;3);(4;5;2);(10;14;10)\}$ b) $B = \{(-1;2;-3);(2;3;-4);(9;1;0)\}$

¿Qué propiedad del producto mixto permite resolver este ejercicio?

Interpretación geométrica del valor absoluto del producto mixto entre vectores

Los vectores **u**, **v** y **w** no coplanares de R^3 permiten definir al considerarse con un origen común un paralelepípedo, cuyo volumen es el valor absoluto del producto mixto entre **u**, **v** y **w**.

Es decir: ***Volumen Paralelepípedo*** $= \left| \mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \right|$

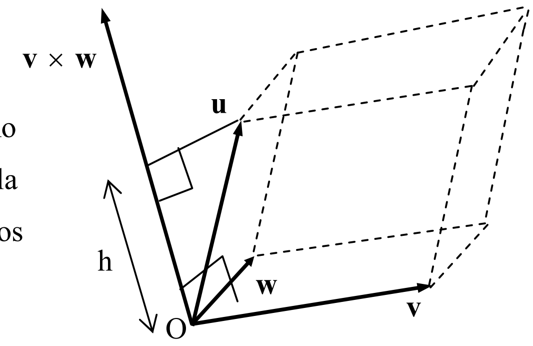


D

Demostración:

De la geometría sabemos que el volumen de un paralelepípedo es:

Volumen del paralelepípedo = ***Superficie de la Base . Longitud de la Altura***



En este caso la base del paralelepípedo es un paralelogramo determinado por los vectores: **v** y **w**, entonces a raíz de la interpretación de la norma del producto vectorial tenemos que:

Superficie de la Base = $\| \mathbf{v} \times \mathbf{w} \|$ **(IV)**

En la figura se observa que:

Longitud de la Altura = Long Proy Esc$_{(\mathbf{v}\mathbf{x}\mathbf{w})}$ **u** = $\left| \dfrac{\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}{\| \mathbf{v} \times \mathbf{w} \|} \right|$ **(V)**

Por lo tanto de **(IV)** y **(V)** se tiene que:

$$\textit{Volumen del paralelepípedo} = \| \mathbf{v} \times \mathbf{w} \| \, . \left| \frac{\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}{\| \mathbf{v} \times \mathbf{w} \|} \right|$$

Simplificando, resulta que:

$$\textbf{\textit{Volumen del paralelepípedo}} = \left| \mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \right| \qquad \textbf{qdlp.\#}$$

Ejemplo:

Hallar el volumen del paralelepípedo que determinan los vectores: **u** = (1,2;3), **v** = (–3;1;4) y **w** = (1;2;1)

$$\textbf{\textit{Volumen del paralelepípedo}} = \left| \mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \right| = \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right| = |-14| = \mathbf{14}$$

EJEMPLO

Ejercicios:

10. Encontrar el valor de $a \in R$ para que los vectores: $\mathbf{u} = (1;-1;3)$, $\mathbf{v} = (2;a;1)$ y $\mathbf{w} = (3;-2;5)$ determinen un paralelepípedo de 7 unidades cúbicas de volumen.

11. Aplicando el producto mixto entre vectores determinar el volumen de los siguientes cuerpos:

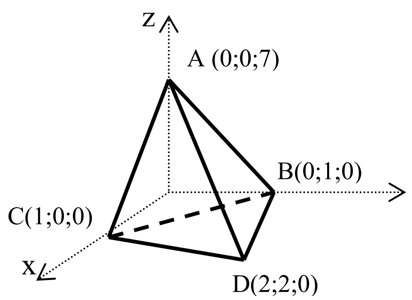


Figura 1

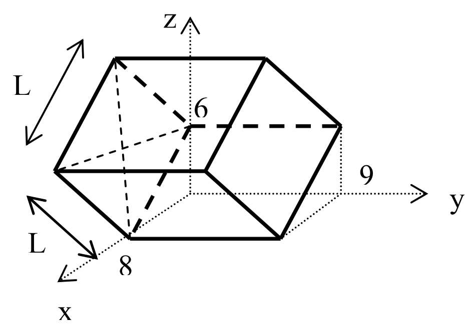


Figura 2

12. Hallar el versor $\check{\mathbf{a}}$ coplanar con los vectores: $\mathbf{u} = (2;1;0)$ y $\mathbf{v} = (0;2;2)$, si además:

$$\mathbf{v} \bullet \check{\mathbf{a}} = 2$$

Software Mathematica

Para realizar el ***producto vectorial*** entre vectores se emplea el comando:

$$\text{Det}\left[\begin{pmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ u_x & u_y & u_z \end{pmatrix}\right]$$

Ejemplo:

Calcular el producto vectorial entre los vectores: $\mathbf{v} = (2;3;5)$ y $\mathbf{w} = (5;-7;0)$


```
35 i + 25 j - 29 k
```

Para efectuar el ***producto mixto*** se utiliza el mismo operador que en el caso del producto vectorial, pero se sustituye la fila de versores canónicos por las componentes del vector que opera en el producto escalar.

Ejemplo:

Calcular el producto mixto entre los vectores: **v** = (2;3;5), **w** = (5;–7;0) y **u** = (–2;–4;1)

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & -7 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

```
-199
```

Autoevaluación: Productos entre vectores

1. Sea el vector **u** = $(u_x;u_y;u_z) \in R^3$ y los vectores **v** = (–2;4;1) y **w** = (3;–2;5) $\in R^3$

a) ¿Qué relación deben satisfacer las componentes del vector **u** para ser coplanar con los vectores **v** y **w**?

b) ¿Qué relación deben satisfacer las componentes del vector **u** para no ser coplanar con los vectores **v** y **w**?

c) ¿Qué relación deben satisfacer las componentes del vector **u** para que el conjunto de vectores {**u**;**v**;**w**} sea linealmente independiente?

d) ¿Qué relación deben satisfacer las componentes del vector **u** para que el conjunto de vectores {**u**;**v**;**w**} sea linealmente dependiente?

2. Sean los vectores **v** = (a;4;1) y **w** = (a;1;1) $\in R^3$. Obtener el ó los valores de a $\in$ R para que los vectores **v** y **w** determinen un paralelogramo de área 27.

3. *Resuelva de dos manera diferentes el siguiente ejercicio.*

Sean los vectores **v** = (a+1;1;4) y **w** = (2b+2;2;8) $\in R^3$. Determine el ó los valores de a y b, números reales, para que los vectores **v** y **w** sean paralelos.

4. Sean los puntos A(3;1;1), B(1;4;1), C(–2;1;1) y D(0;1;6). Obtener:

a) El área del triángulo ABC

b) El volumen del paralelepípedo que determinan los vectores **AD**, **AC** y **AB**

5. Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdadera, demostrar y en caso de ser falsa, ofrecer un contraejemplo adecuado.

a) Si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{v} \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = 0$

b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 2\,(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

c) $(\alpha\,\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \times \mathbf{u} + (\beta\mathbf{u} - \alpha\mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$

d) $\mathbf{v} \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

Actividades Adicionales

1. Hallar un vector paralelo al plano coordenado (yz) de norma 2 que sea perpendicular al vector **a** = (1;2;–4)

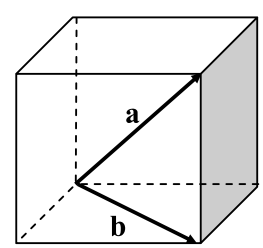
2. Obtener los vectores de módulo $\sqrt{5}$ cuya proyección ortogonal sobre el vector **v** $=(2;1)$ es el vector **u** = $\left(\frac{8}{5};\frac{4}{5}\right)$

3. Sean $\mathbf{a}=(3;-1;5)$ y $\mathbf{b}=(1;2;-3)$, hallar un vector **c** tal que sea perpendicular al eje z sabiendo que: $\mathbf{a}\bullet\mathbf{c}=9$ y $\mathbf{b}\bullet\mathbf{c}=-4$

4. Sean $\mathbf{v}=(2;4;0)$ y $\mathbf{u}=(3;1;-1)$, obtener las componentes de los vectores $\mathbf{w_1}$ y $\mathbf{w_2}$ sabiendo que: $\mathbf{w_1}$ es paralelo al vector **v**, $\mathbf{w_2}$ es perpendicular al vector **v** y que $\mathbf{u}=\mathbf{w_1}+\mathbf{w_2}$

5. En la figura se observa un cubo de 4 unidades de arista, el vector **a** es una de sus diagonales y el vector **b** es una de las diagonales de la base. Obtener:

a) La longitud de los vectores **a** y **b**
b) La medida del ángulo entre los vectores **a** y **b**
c) La componente del vector **a** ortogonal a la dirección del vector **b**
d) Usando operaciones entre vectores, la superficie total del cubo
e) Usando operaciones entre vectores, el volumen del cubo



6. Siendo **w** = (a;a;0) y **v** = (–2a;0;a), calcular:

a) $\|\mathbf{v}\|^2$

b) $\|\mathbf{v}\|^2+\|4\mathbf{w}+4\mathbf{v}\|^2$

c) a $\in$ R tal que el módulo del vector **w** sea 4

d) a $\in$ R tal que el módulo del vector $\mathbf{w}+\mathbf{v}$ sea $\frac{1}{3}$

7. Sean **v** = (–1;3) y P(2; –5). Hallar las coordenadas del punto Q sabiendo que: **v** = **PQ**.

8. El segmento AB es determinado por los puntos A(–2;3) y B(3;–2), hallar el vector **OP** sabiendo que el punto P(x;y) divide al segmento AB en la proporción $\frac{2}{5}$. ¿Qué componentes tendrá el vector **OP** si el punto P(x;y) divide al segmento AB en la proporción $\frac{3}{4}$?

9. Si B es el punto medio del segmento determinado por los puntos P(1;0;–3) y Q(–2;3;3), hallar las coordenadas del punto A para que el vector $\overline{AB}$ sea paralelo al vector $v = (-1;3;2)$. ¿Es única la solución?

10. Sean P(–3;1;7) y Q(8;1;7). Hallar un vector unitario con sentido opuesto al vector $\overline{PQ}$.

11. Sean P(2;–3;4;–5) y Q(1;–1,1;–1) puntos del espacio vectorial R^4. Obtener las componentes de los vectores: **PQ** y **MQ** siendo M el punto que esta situado a un tercio del camino de P a Q.

12. Hallar las componentes de los vectores que se definen en cada caso:

a) $\mathbf{v} \in R^5$ tal que: $v_n = 2^n$

b) $\mathbf{w} \in R^{10}$ tal que: $w_1 = 3$, $w_2 = w_1 + 2$, $w_3 = w_2 + 2$, ... , $w_{10} = w_9 + 2$

c) $\mathbf{s} \in R^8$ tal que: s_n = suma de los n primeros números naturales.

13. Dados $\| \mathbf{u} \| = 3$ y $\| \mathbf{v} \| = 2$, y sabiendo que el ángulo que determinan es de 120º. Hallar las normas de los vectores: $\mathbf{w_1} = \mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ y $\mathbf{w_2} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$, su producto escalar y el ángulo que determinan.

14. Sean **u**, **v** y **w** son tres vectores de R^3 de los cuales sabe que: $\| \mathbf{u} \| = 2$, $\| \mathbf{v} \| = 3$, $\| \mathbf{w} \| = 4$ y que: $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = 0$. Hallar los ángulos: α entre **u** y **v**, β entre **v** y **w**, y θ entre **u** y **w**.

Respuestas de las actividades

1. *Utilice las propiedades del producto vectorial entre vectores......* ☺

2. a) (1;–1; –3) b)(–1;1;3) c)(2; –2; –6) d)(2; –2; –6) e) **0** f)(–28;–16;–4)

g) $\sqrt{11}$ h) $\sqrt{11}$

3. a) (–3a;0; –4a) b) (–3a;0; –4a) c) 10(3a;0;4a) d) (0;4a;0)

4. a) $\frac{\sqrt{6}}{3}(\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})$ b) $\left(0;\frac{1}{\sqrt{1+a^4}};\frac{-a}{\sqrt{1+a^4}}\right)$

5. *Utilice la definición de producto escalar y la definición de la norma del producto vectorial.........* ☺

6. a) 768 b) $\left(20+4\sqrt{10}\right)a^2$

7. a)1 b)–1 c) 1 d)–1 e) –1 f)1

8. $a = 0$ ó $a = 4$

9. a) ld b) li

10. $a = -\frac{5}{2}$ ó $a = 1$

11. ***Figura 1***: Volumen tetraedro = $\frac{1}{6}$ Volumen paralelepípedo

Entonces: Volumen tetraedro = $\frac{1}{6}\left|\mathbf{CA}\bullet(\mathbf{CB}\times\mathbf{CD})\right| = \frac{7}{2}$

Figura 2: Se consideran los puntos: A(0;0;6), B(8;0,0), C(0;9;6) y D(8;0;12), en consecuencia el Volumen del Paralelepípedo es: $\left|\mathbf{AC}\bullet(\mathbf{AB}\times\mathbf{AD})\right| = 864$

12. $\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ ó $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$

Respuestas de la autoevaluación

Junto a su grupo de estudio debe entregar al docente la resolución de las actividades de la autoevaluación para su corrección........... ☺

Respuestas de las actividades adicionales

1. $\left(0;-\frac{4}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ó $\left(0;\frac{4}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

2. (1;2) ó $\left(\frac{11}{5};-\frac{2}{5}\right)$

3. (2;–3;0)

4. $\mathbf{w_1} = \frac{11}{10}(2;4;0)$ y $\mathbf{w_2} = \left(\frac{4}{5};-\frac{17}{5};-1\right)$

5. a) $4\sqrt{3}$ y $4\sqrt{2}$ b) Arccos $\sqrt{\frac{2}{3}}$ c) (0;0;4)

d) 96 e) 64

6. a) $5\,a^2$ b) $53\,a^2$ c) $a = \pm 2\sqrt{2}$ d) $a = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}$

7. Q(1;8)

8. Se demuestra que si P divide al segmento AB en la proporción $\frac{\alpha}{\beta}$ entonces:

$\mathbf{OP} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\mathbf{OA} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathbf{OB}$, entonces para la proporción 2:5, $\mathbf{OP} = \left(-\frac{4}{7};\frac{11}{7}\right)$ y para la proporción 3:4 el vector es: $\mathbf{OP} = \left(\frac{1}{7};\frac{6}{7}\right)$

9. Existen infinitos puntos que verifican el enunciado: A= $\left(\frac{-1-z}{2};\frac{3z+3}{2};z\right)$ $\forall z \in R$

10. $-\overset{\vee}{\mathbf{v}} = (-1;0;0)$

11. $\mathbf{PQ} = (-1;2;-3;4)$ y $\mathbf{MQ} = \left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3};-2;\frac{8}{3}\right)$

12. a) (2;4;8;16;32) b)(3;5;7;9;11;13;15;17;19;21) c) (1,3;6;10;15;21;28;36)

13. $\|\mathbf{w_1}\| = \sqrt{13}$, $\|\mathbf{w_2}\| = \sqrt{52}$, $\mathbf{w_1} \bullet \mathbf{w_2} = 1$ y $\theta \approx 87°\,47'$

14. Los ángulos pedidos (ó de manera equivalente, sus cosenos) serán conocidos cuando se sepa cuánto valen los productos escalares:**u•v**, **v•w** y **u•w**. Para hallarlos al multiplicar escalarmente miembro a miembro la igualdad: **u** + **v** + **w** = **0** por **u**, **v** y por **w** respectivamente, se obtendrá un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que permitirá deducir que: $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = \frac{3}{2}$, $\mathbf{v}\bullet\mathbf{w} = -\frac{21}{2}$ y $\mathbf{u}\bullet\mathbf{w} = -\frac{11}{2}$, a partir de estos datos es sencillo determinar el valor de los ángulos pedidos........☺

Bibliografía

- Anton, H. **"Introducción al Álgebra lineal"**.2º Edición. Limusa. México, 2000.
- Nakos, G. y Joyner, D. **"Álgebra lineal con aplicaciones"**. Thomson editores. México, 1999.
- Lay, D. **"Álgebra lineal y sus aplicaciones"**. 2º Edición. Addison Wesley Longman. México, 1999.