Matemáticas 2ºB
Tema 1

Cálculo de Probabilidades

Contenidos oficiales. Profundización en la Teoría de la Probabilidad. Axiomática de Kolmogorov. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa.

1. Cosas básicas.

Experimento aleatorio: cualquier actividad donde no puedo predecir el resultado, porque influye el azar.

Ejemplos. (1) Los juegos de azar (dados, cartas, etc.)

(2) Duración de un trayecto.

(3) Errores de fábrica.

(4) Medicamentos nuevos.

Espacio muestral: es el conjunto de todos los resultados posibles.

Ejemplos. 1) Lanzo un dado: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

2) Lanzo una moneda: $\Omega = \{C,X\}$.

3) Baraja. Saco una carta:

– Palo: $\Omega = \{O,C,E,B\}$.

– Valor: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,S,C,R\}$.

4) Lanzo una moneda hasta que salga la primera cara y cuento el número de tiradas.

$$\Omega = \{1,2,3,4,\dots,\infty\}.$$

Todos los ejemplos anteriores se llaman **espacios dicretos**, porque "quedan huecos" entre dos elementos del espacio.

5) Mido la estatura de una persona de cierta ciudad donde el más bajo es un niño que mide $0.50\,\mathrm{m}$ y la más alta es una jugadora de baloncesto, que mide $2.08\,\mathrm{m}$.

$$\Omega = \left[0.50\ ,\ 2.08\right].$$

Espacio continuo.

2. Sucesos (eventos).

Un **suceso** es un subconjunto del espacio muestral.

1) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

$A = \{1,3,5\}$, "sale un número impar".

$B = \{6\}$, "sale un seis".

"Sal un número menor que 5", $C = \{1,2,3,4\}$.

Para expresar que S es un suceso de Ω escribimos $S \subset \Omega$.

2) Ejemplo extremo.

Dado. D = "sale un número meyor que 14".

$D = \{\ \} = \emptyset$ "conjunto vacío". → Sucesos imposibles.

E = "sale un número menor que 10"

$E = \Omega$ todo el espacio → Suceso seguro.

3) $\Omega = \{1,2,3\}$.

Sucesos: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\} = \Omega$

Si $\#\Omega = n$ entonces #sucesos $= 2^n$.

3. Operaciones con sucesos.

Unión, intersección y el suceso contrario. Diferencia.

Unión. Consiste en formar un nuevo suceso juntando los elementos de dos o más sucesos. Los elementos repetidos se escriben solo una vez.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$; $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{1,2,5,6\}$;

$C = \{2,3,5,6\}$.

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$.

$A \cup C = \{1,2,3,4\} \cup \{2,3,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$.

$B \cup C = \{1,2,5,6\} \cup \{2,3,5,6\} = \{1,2,3,5,6\}$.

- ¿Es conmutativa? $A \cup B = B \cup A$. Sí.
- ¿Es asociativa? $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Sí.
- $A \cup \Omega = \Omega$; $A \cup \emptyset = A$.
- $S \subset A$, $S \cup A = A$.

Intersección. Formamos un nuevo suceso con los elementos comunes de dos o más sucesos.

Ejemplo. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$; $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{1,2,5,6\}$;

$C = \{2,3,5,6\}$.

- $A \cap B = \{1,2\}$.
- $A \cap C = \{1,2,3,4\} \cap \{2,3,5,6\} = \{2,3\}$.

- $B \cap C = \{1,2,5,6\} \cap \{2,3,5,6\} = \{2,5,6\}$.

Podría ocurrir que dos sucesos A y B no tengan elementos comunes

$$A \cap B = \emptyset.$$

Los sucesos se llaman **incompatibles**.

Propiedades.

- ¿Es conmutativa? $A \cap B = B \cap A$. Sí.
- ¿Es asociativa? $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. Sí.
    - $A = \{1,2,3,4\};\ B = \{1,2,5,6\};\ C = \{2,3,5,6\}$.
    - $A \cap B \cap C = \{2\}$.
    - $(A \cap B) \cap C = \{1,2\} \cap \{2,3,5,6\} = \{2\}$.
    - Ídem.
- $A \cap \Omega = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- $S \subset A, \qquad S \cap A = S$.
- Distributiva: con números es $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.

  Con números no es cierto que: $a + (b \times c)$ sea igual a $(a + b) \times (a + c)$.

  $$2 + (3 \times 4) = 2 + 12 = 14$$
  $$(2 + 3) \times (2 + 4) = 5 \times 6 = 30$$

  Con sucesos son ciertas las dos distributivas:

  $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
  $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Suceso contrario.

Dado un suceso A su **contrario** es otro suceso formado por todos los elementos de Ω que no están en A.

Ejemplo. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

$A = \{1,2,5\} \Rightarrow A^c = \{3,4,6\}$.

$A^c = \bar{A} = A' = A^* = \complement A$.

Propiedades.

- $(A^c)^c = A$.
- $\Omega^c = \emptyset$.
- $\emptyset^c = \Omega$.
- Leyes de Morgan:
    - $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$
    - $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

Ejercicio. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

$A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{3,4,5,6,7\}$.

◆ $A^c \cup B^c = \{6,7,8\} \cup \{1,2,8\} = \{1,2,6,7,8\}$.

◆ $(A \cap B)^c = \{3,4,5\}^c = \{1,2,6,7,8\}$.

Diferencia de sucesos.

Dados dos sucesos A y B su **diferencia** es un nuevo suceso formado por los elementos de A que NO están en B.

$$A \setminus B = A - B = A \cap B^c.$$

Ejemplo. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

$A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{3,4,5,6,7\}$.

▸ $A \setminus B = \{1,2,3,4,5\} \cap \{1,2,8\} = \{1,2\}$.

▸ $B \setminus A = \{6,7\}$.

Ejercicio. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

$A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{3,4,5,6,7\}$, $C = \{1,2,6,7,8\}$.

1. $(A \cup B) \setminus C$

◆ $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

◆ $(A \cup B) \setminus C = \{3,4,5\}$.

2. $B^c \setminus (A \cap C)$

◆ $A \cap C = \{1,2\}$.

◆ $B^c \setminus (A \cap C) = \{1,2,8\} \setminus \{1,2\} = \{8\}$.

3. $(A \setminus C)^c \cap B$

◆ $A \setminus C = \{3,4,5\}$.

◆ $(A \setminus C)^c = \{1,2,6,7,8\}$.

◆ $(A \setminus C)^c \cap B = \{6,7\}$.

4. Interpretación verbal de las operaciones con sucesos.

Ocurre un suceso. Al realizar el experimento aleatorio el resultado es uno de los elemntos del suceso.

Ejemplo. Lanzo un dado. Ha ocurrido el suceso "salir par"

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$; $A = \{2,4,6\}$.

Ha salido 2, 4 o 6.

Unión. $A \cup B$: ha ocurrido al menos uno de los sucesos A o B, sin descartar que puedan ocurrir los dos.

Intersección. $A \cap B$: han ocurrido los sucesos A y B, ambos, A y B.

Suceso contrario. A^c: no ha ocurrido A.

Diferencia. $A \setminus B$: ha ocurrido A pero no B. $(A \cap B^c)$.

Ejercicio. Alicia (A), Benito (B) y Carmen (C).

▸ Llegan puntuales los tres: $A \cap B \cap C$.

▸ Llega al menos uno puntual: $A \cup B \cup C$.

▸ Alicia llega puntual y al menos uno de sus amigos: $A \cap (B \cup C)$

▸ Alicia llega puntual y Benito no: $A \cap B^c = A \setminus B$.

▸ No llegan puntuales ni Alicia ni Carmen: $A^c \cap C^c = (A \cup C)^c$.

5. Idea intuitiva de probabilidad.

Caja 1: $\boxed{\text{B, N, R}} \Rightarrow\ ?\ \Rightarrow\ \Omega = \{B,N,R\}$

Caja 2: $\boxed{\text{B, N, N, R, R, R}} \Rightarrow\ ?\ \Rightarrow \Omega = \{B,N,R\}$

Para diferenciar ambos experimentos no basta el espacio muestral. Hay que añadir **una probabilidad**. Es un número que asignamos a cada elemento del espacio muestral, que mide las posibilidades de que ocurra ese elemento.

1º) La probabilidad de un elemento es un número entre 0 y 1.

$$0 = \text{ imposible}, 1 = \text{ seguro}.$$

2º) La probabilidad de un suceso se obtiene sumando las probabilidades de sus elementos.

3º) La probabilidad de Ω es 1.

Esas tres condiciones son la versión simplificada de los **axiomas de Kolmogorov**.

Ejemplo.

Caja 1: $\boxed{\text{B, N, R}} \Rightarrow\ ?\ \Rightarrow\ \Omega = \{B,N,R\}$

Caja 2: $\boxed{\text{B, N, N, R, R, R}} \Rightarrow\ ?\ \Rightarrow \Omega = \{B,N,R\}$

Caja 1		Caja 2	
Ω	P	Ω	P
B	1/3	B	1/6
N	1/3	N	2/6
R	1/3	R	3/6
$\sum$	1	$\sum$	1

6. Regla de Laplace.

Es un método para calcular probabilidades cuando se dan dos condiciones:

1º) El espacio muestral es finito (no infinito): Ω.

2º) Todos los elementos de Ω tienen la misma probabilidad.

La probabilidad de un suceso A se calcula

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}.$$

Ejemplo. Lanzo un dado dos veces. Calcula la probabilidad de:

a) que las dos puntuaciones sumen 10.

b) que la segunda sea el doble de la primera.

c) que entre las dos haya una diferencia de un punto.

Solución. Uso una tabla porque el proceso tiene dos pasos.

Ω	1	2	3	4	5	6
1		★♡				
2	♡		♡	★		
3		♡		♡		★
4			♡		♡	✓
5				♡	✓	♡
6				✓	♡	

$\#\Omega = 6 \times 6 = 36.$

$\#A = 3\ (\checkmark)$

$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$

$\#B = 3\ (\bigstar)$

$P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$

$\#C = 10\ (\heartsuit)$

$P(C) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$

Ejercicio. En un concurso se hace lo siguiente:

– El concursante saca una tarjeta al azar de un sobre que contiene 4 tarjetas con los premios 0€, 10€, 50€ o 100€.

– Luego lanza un dado y multiplica el premio de la tarjeta por el número del dado.

Calcula la probabilidad de:

a) que no gane nada.

b) que gane exactamente 300 €.

c) que gane 200 € o más.

Solución.

Ω	1	2	3	4	5	6
0	✓	✓	✓	✓	✓	✓
10						
50				♡	♡	♡★
100		♡	♡★	♡	♡	♡

$\#\Omega = 4 \times 6 = 24.$

$\#A = 6;\ P(A) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$

$\#B = 2;\ P(B) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}.$

$\#C = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}.$

Ejericio. A una entrevista se presentan 4 candidatos: uno es hombre y las otras tres, mujeres. Como son igualmente aptos se selecciona al azar a los dos candidatos. Calcula la probabilidad de que:

a) que el hombre sea elegido.

b) que mi amiga, Elena Nito, que es una de las mujeres, salga elegida con otra mujer.

Solución.

Ω	H	M1	M2	M3
H	X	✓	✓	✓
M1	✓	X	♡	♡
M2	✓	♡	X	
M3	✓	♡		X

$\#\Omega = 4 \times 4 - 4 = 12.$

$\#A = 6;\ P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$

$\#B = 4;\ P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$

Elena = M1

Ejercicio. Tengo una caja con 4 bombones. Uno es de chocolate blanco y los otros tres de negro. Elijo al azar uno y me lo como. Luego elijo otro al azar y me lo como. Calcula la probabilidad de que ambos sean del mismo sabor.

Solución.

Ω	B	N1	N2	N3
B	X			
N1		X	✓	✓
N2		✓	X	✓
N3		✓	✓	X

$\#\Omega = 4 \times 4 - 4 = 12.$

$\#A = 6$

$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$

Otra forma.

– Fuerza bruta. $(B,N_1),(B,N_2),\ (B,N_3);\ (N_1,B),\ (N_1,N_2)$, etc.

– Combinatoria $\#\Omega = 4 \times 3 = 12$

$\#A = 3 \times 2 = 6.$

$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$

– Árbol:

$$\begin{cases} B\,[1/4] \to N\,[1] \\ N\,[3/4] \to \begin{cases} B\,[1/3] \\ N\,[2/3] \Rightarrow \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicio. En una oficina hay tres despachos A, B y C. Llegan tres cartas, una dirigida a cada despacho. Si las reparto al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno reciba la carta correcta?

Solución.

Fuerza bruta:

Despacho	Carta que le entrego					
A	A*	A*	B	B	C	C
B	B*	C	A	C	A	B*
C	C*	B	C*	A	B	A

$\#\Omega = 6$. $\#S = 4$ donde almenos una carta llega a su destino.

$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

– Árbol.

$$\begin{cases} A\,[1/3] \Rightarrow \frac{1}{3} \\ B\,[1/3] \to \begin{cases} A\,[1/2] \to C\,[1] \Rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6} \\ C\,[1/2] \to A\,[1] \blacksquare \end{cases} \\ C\,[1/3] \to \begin{cases} A\,[1/2] \to B\,[1] \blacksquare \\ B\,[1/2] \Rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{cases} \end{cases}$$

$P(A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

7. Ley de los grandes números.

Supongamos que tengo un experimento aleatorio y lo repito **muchas veces** (n). Ahora cuento cuántas veces ha ocurrido un suceso A (f). Ese número f se llama la **frecuencia** (**absoluta**) del suceso. El cociente $\frac{f}{n}$ se llama **frecuencia relativa** o **probabilidad empírica**.

Ejemplo. Si lanzo un dado, sé que la probabilidad (teórica) de que salga un 1 es 1/6. Si ahora lanzo el dado 100 veces obtengo

Ω	1	2	3	4	5	6
f	20	14	16	15	18	17

Prob. empírica: $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$.

Prob. teórica: $\frac{1}{6}$.

Ley de los grandes números. Si n es muy grande la prob. empírica (o frecuencia relativa) se aproxima a la probabilidad (teórica).

Ejemplo. Queremos estimar cuántos peces de una determinada especie hay en un lago. Se pescan unos cuantos peces, 40, y los marcamos. Luego los soltamos y esperamos unos días para que se mezclen con el resto. Hacemos una segunda pesca de 85 peces entre los cuales encuentro 11 marcados.

– Prob. teórica de que un pez esté marcado: $P(A) = \frac{40}{n}$.

– Prob. empírica de un pez marcado: $\frac{11}{85}$.

– Si 85 es suficientemente grande, la LGN afirma que

$$\frac{11}{85} \approx \frac{40}{n} \Rightarrow 11n \approx 40 \times 85 = 3400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \approx \frac{3400}{11} = 309.09 \approx 309.$$

Puedo estimar que hay alrededor de 309 peces en el lago.

8. Fórmulas que se derivan de la axiomática de Kolmogorov.

1º) $0 \leq P(A) \leq 1$.

2º) $P(A)$ = suma de las pr. de los elementos que lo componen.

3º) $P(\Omega) = 1$.

———

Si conocemos $P(A)$, $P(B)$, buscamos fórmulas para calcular $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, etc.

1. **Unión**. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2. **Suceso contrario**. $P(A^c) = 1 - P(A)$.

3. **Diferencia**. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Como $A \setminus B = A \cap B^c \Rightarrow P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$.

4. **Leyes de Morgan**.

▸ $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c \Rightarrow$

$P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B)$

▸ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \Rightarrow$

$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$.

5. **Intersección**. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P\left(B \mid A\right) = P(B) \cdot P\left(A \mid B\right)$.

Probabilidad condicionada.

Tabla de contingencia

	1	2	$\sum$
16	0.20	0.23	0.43
17	0.31	0.26	0.57
$\sum$	0.51	0.49	1.00

¿Cuál es la probabilidad de que un alumno tenga 16 años y dos supensos?

$P(16 \cap 2) = 0.23$

¿Y de que tenga 16 años?

$P(16) = 0.43$

¿Cuál es la probabilidad de que un alumno tenga 16 años, sabiendo que tiene dos suspensos?

$P\left(16 \mid 2\right) = \frac{0.23}{0.49} = 0.47.$

Ejemplo. $P\left(1 \mid 17\right) = \frac{0.31}{0.57} = 0.54$

	1	2	$\sum$
16	0.20	0.23	0.43
17	**0.31**	**0.26**	**0.57**
$\sum$	0.51	0.49	1.00

$\Rightarrow \; P\left(A \mid B\right) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P\left(B \mid A\right) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P\left(B \mid A\right).$

Independencia. Decimos que dos sucesos A y B son **independientes** si la probabilidad de uno de ellos, $P(A)$, es la misma de que ocurra dentro de B, $P\left(A \mid B\right)$.

$$P(A) = P\left(A \mid B\right).$$

$P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$ Si son independientes.

Ejericicio (**3**). Se tienen dos sucesos A y B de un espacio muestral y se conocen las probabilidades $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ y $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. ¿Son los sucesos A y B incompatibles?

Solución.

Datos: $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/4$ y $P(A \cup B) = 2/3$.

Me piden: ¿Son incompatibles?

Incompatibles $\Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - P(A \cap B)$.

$P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12} \neq 0$.

Los sucesos A y B no son incompatibles.

Ejercicio (**4**). Si A y B son dos sucesos tales que $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, calcular $P(A^c \cap B^c)$, donde A^c representa el suceso contrario de A.

Solución.

Datos: $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

Me piden: $P(A^c \cap B^c)$.

Leyes de Morgan: $P(A^c \cap B^c) = P[(A \cup B)^c] =$

$= 1 - P(A \cup B) = 1 - \Big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\Big) =$

$= 1 - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$.

La $P(A^c \cap B^c) = \frac{3}{8}$.

Ejercicio (**5**). Dados dos sucesos A y B de un espacio muestral se sabe que $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, y $P(A^c \cup B^c) = \frac{7}{10}$. Halla $P(B)$.

Solución.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. [1]

Necesito $P(A \cap B)$.

$P(A^c \cup B^c) = \frac{7}{10} \Rightarrow P[(A \cap B)^c] = \frac{7}{10} \Rightarrow$

$1 - P(A \cap B) = \frac{7}{10} \Rightarrow -P(A \cap B) = \frac{7}{10} - 1 = -\frac{3}{10} \Rightarrow$

$P(A \cap B) = \frac{3}{10}$.

Vuelvo a [1].

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$\frac{4}{5} = \frac{2}{5} + P(B) - \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{4}{5} - \frac{2}{5} + \frac{3}{10} = P(B) \Rightarrow \frac{7}{10} = P(B)$.

La $P(B) = \frac{7}{10}$.

Ejericio (**6**). Calcula $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$ sabiendo que $P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5}$, $P(A) = \frac{3}{5}$ y $P(B) = \frac{4}{5}$.

Solución.

$P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5}$ [1]

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) + P(A \cap B) = \frac{7}{5}$ [2]

Forma un sistema con [1] y [2]:

$$\left\{\begin{aligned} P(A\cup B) - P(A\cap B) &= \frac{2}{5} \\ P(A\cup B) + P(A\cap B) &= \frac{7}{5} \end{aligned}\right\}$$

Sumo ambas ecuaciones (por reducción):

$$P(A\cup B) - P(A\cap B) + P(A\cup B) + P(A\cap B) = \frac{2}{5} + \frac{7}{5}$$

$$2\,P(A\cup B) = \frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{9}{5} \;\Rightarrow\; P(A\cup B) = \frac{\left(\frac{9}{5}\right)}{2} = \frac{9}{10}.$$

Sustituyo en la ecuación 2ª

$$\frac{9}{10} + P(A\cap B) = \frac{7}{5} \;\Rightarrow P(A\cap B) = \frac{7}{5} - \frac{9}{10} = \frac{1}{2}.$$

Las probabilidades pedidas son $P(A\cup B) = \frac{9}{10}$ y $P(A\cap B) = \frac{1}{2}$.

Para mañana, **7 y 8**.